Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 11 & 12 - **Wielomiany i równania wielomianowe**

II LO Kraków, 04.04.2025 i 11.04.2025r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

TEORIA

Twierdzenie 1. *(Dzielenie wielomianów z resztą) Niech $F(x), G(x)$ będą wielomianami, przy czym wielomian $G(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Wówczas istnieje wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ spełniające równość*

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(X)$$

i takie, że stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $G(x)$. Co więcej, wielomiany te są wyznaczone jednoznacznie.

Twierdzenie 2. *(Twierdzenie Bézoute'a) Wielomian $P(x)$ ma pierwiastek a wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielny przez $x - a$.*

Twierdzenie 3. *Wielomian stopnia n posiada co najwyżej n pierwiastków.*

Twierdzenie 4. *Niech $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeśli liczba wymierna r jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to jej licznik dzieli a_0, a mianownik dzieli a_n.*

Twierdzenie 5. *Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba $P(a) - P(b)$ jest podzielna przez $a - b$.*

Twierdzenie 6. *(Wzory Viète'y dla wielomianów stopnia 2) Niech*

$$P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

będzie wielomianem o pierwiastkach x, y. Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$x + y = -\frac{a_1}{a_2}$$
$$xy = \frac{a_0}{a_2}.$$

Twierdzenie 7. *(Wzory Viète'y dla wielomianów stopnia 3) Niech*

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

będzie wielomianem o pierwiastkach x, y, z. Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$x + y + z = -\frac{a_2}{a_3}$$
$$xy + yz + xz = \frac{a_1}{a_3}$$
$$xyz = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Twierdzenie 8. *(Wzory Viète'y dla wielomianów stopnia 4) Niech*

$$P(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

będzie wielomianem o pierwiastkach x, y, z, w. Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= -\frac{a_3}{a_4} \\ xy + xz + xw + yz + yw + zw &= \frac{a_2}{a_4} \\ xyz + xyw + xzw + yzw &= -\frac{a_1}{a_4} \\ xyzw &= \frac{a_0}{a_4}. \end{aligned}$$

ZADANIA

1. Rozwiązać układ równań $x^5 + y^5 = 33$, $x + y = 3$.

2. Liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 2x^2 - x - 1$. Wyznaczyć $a^2 + b^2 + c^2$ i $a^3 + b^3 + c^3$.

3. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań $x + y + z = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1$.

4. Niech a, b będą pierwiastami wielomianu $x^2 - 6x + 1$. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $a^n + b^n$ jest liczbą całkowitą nie podzielną przez 5.

5. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite i spełnia $P(0) = 2025$. Jaka jest największa możliwa liczba całkowitych pierwiastków wielomianu $P(x)$?

6. Wielomian P ma stopień n i spełnia $P(k) = k/(k + 1)$ dla liczb całkowitych $0 \leq k \leq n$. Wyznaczyć $P(n + 1)$.

7. Czy istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i parami różne liczby całkowite a, b, c, że
$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a?$$

8. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynniku wiodącym równym 1 oraz cztery parami różne liczby całkowite a, b, c, d spełniające $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Pokazać, że nie istnieje liczba całkowita k spełniająca $P(k) = 8$.

9. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Pokazać, że jeśli $P(x) + 12$ ma co najmniej sześć różnych pierwiastków całkowitych, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

10. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i liczba całkowita $n \neq 0$ spełniająca $P(n^2) = 0$. Pokazać, że dla wszystkich dodatnich liczb wymiernych r zachodzi $P(r^2) \neq 1$.

11. (a) Dla jakich liczb naturalnych n wielomian $x^{2n} + x^n + 1$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$.
    (b) Dla jakich liczb naturalnych n liczba $10^{2n} + 10^n + 1$ jest podzielna przez 37?

12. Danych jest $2n$ parami różnych liczb $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$. Tworzymy tablicę wymiaru $n \times n$ poprzez umieszczenie w i-tym wierszu i j-tej kolumnie liczby $a_i + b_j$. Pokazać, że jeśli iloczyn wyrazów w każdej kolumnie jest taki sam, to iloczyn wyrazów w każdym wierszu również jest taki sam.

13. Niech a, b będą liczbami całkowitymi. Pokazać, że wielomian $(x - a)^2(x - b)^2 + 1$ nie da się przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych.

14. Czy istnieje wielomian niezerowy $P(x)$ spełniający $xP(x - 1) = (x + 1)P(x)$?

15. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające równość $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.