Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 3 & 4 - **Równania funkcyjne**

II LO Kraków, 10.01 i 17.01.2025 r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

ZADANIA

Twierdzenie 1. *(Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną) Dla liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n \geq 0$ zachodzi nierówność*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

W powyższej nierówności zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a_1, \dots, a_n$ są równe.

Twierdzenie 2. *(Nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną) Dla liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

W powyższej nierówności zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a_1, \dots, a_n$ są równe.

1. Pokazać, że dla liczb $a, b, c > 0$ spełnione są nierówności

   $$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \text{oraz} \quad a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

   Kiedy zachodzi równość?

2. Pokazać, że dla liczb $a, b, c \geq 0$ spełnione są nierówności

   $$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab \geq abc(ab + bc + ca).$$

3. Pokazać, że dla liczb $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi nierówność

   $$(a_1 + \dots + a_n) \cdot (\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

   Kiedy zachodzi równość?

4. Pokazać, że dla liczb $a, b, c, d > 0$ spełnione są nierówności

   $$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d.$$

5. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają $abc = 1$, to

   $$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

6. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają $abc = 1$, to

   $$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geq 27.$$

7. Pokazać, że dla liczb $a, b, c \geq 0$ spełniona jest nierówność

   $$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Pokazać, że jeśli a, b, c są bokami pewnego trójkąta, to spełniona jest nierówność

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

9. Niech a, b będą liczbami dodatnimi i niech s będzie najmniejszą z liczb $a, b + 1/a, 1/b$. Jaka jest największa możliwa wartość s i dla jakich wartości a, b jest ona osiągana?

10. Pokazać, że dla liczb $a, b, c \geq 0$ spełniona jest nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

11. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają $a + b + c = 1$, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + 2\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}.$$

12. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają $a + b + c = 3$, to spełniona jest nierówność

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

13. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c, d > 0$ spełniają $abcd = 1$, to

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d.$$

14. Pokazać, że jeśli liczby $a, b, c, d \geq 0$ spełniają $a+b+c+d = 4$, to spełniona jest nierówność

$$\frac{4}{abcd} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$