Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 5 & 6 - **Zasada szufladkowa Dirichleta**

II LO Kraków, 6.12 i 13.12.2024r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

TEORIA

Zasada szufladkowa Dirichleta (lub po prostu **zasada szufladkowa**) to bardzo logiczny wynik, niezwykle użyteczny i pojawiający się we właściwie każdej dziedzinie zadań olimpijskich.

Wersja podstawowa

Jeżeli do n szufladek włożymy przynajmniej $n+1$ piłek, to musi istnieć szufladka zawierająca przynajmniej 2 piłki.

Wersja rozszerzona

Jeżeli do n szufladek włożymy przynajmniej $k \cdot n+1$ piłek, to musi istnieć szufladka zawierająca przynajmniej $k+1$ piłek.

Jak widać, zasada szufladkowa nie jest nazywana twierdzeniem. Dzieje się tak nie bez powodu, ten rezultat jest czysto logiczny i każdy na pierwszy rzut oka widzi, czemu tak się dzieje. Dlatego powoływanie się w rozwiązaniu na powyższą zasadę jest używane w celu skrócenia rozumowania. W momencie napisania "to wynika z zasady szufladkowej" pozwalamy na pominięcie dowodu tego logicznego rozumowania.

ZADANIA

1. Udowodnij, że wśród dowolnych 11 liczb naturalnych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez 10.
2. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb naturalnych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n.
3. Dany jest pewien zbiór 2024 liczb naturalnych. Wykaż, że można z tego zbioru wybrać takie trzy liczby a, b, c, aby liczba $(a-b)c$ była podzielna przez 2024.
4. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.
5. Wykaż, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.
6. Każde pole prostokąta 3×7 pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieją takie 4 pola, które mają ten sam kolor i są "wierzchołkami" prostokąta.
7. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.
8. Wewnątrz kwadratu o boku 2 wybrano 5 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich jest nie większa niż $\sqrt{2}$.
9. Wewnątrz okręgu o promieniu 1 wybrano (a) 7, (b) 6 punktów. Udowodnij, że istnieją dwa odległe o co najwyżej 1.
10. Na przyjęciu spotkało się 6 osób. Każde dwie się znają lub się nie znają. Udowodnij, że istnieje taka trójka osób, że wszyscy się znają lub nikt nie nie zna z nikim.

11. W pewnym mieście znajduje się 17 wysp. Każde dwie są połączone ze sobą za pomocą jednej z trzech możliwości: mostu samochodowego, kładki dla pieszych lub mostu kolejowego. Udowodnij, że istnieją takie trzy wyspy, że każde dwie są połączone w ten sam sposób.

12. Rosjanie dowiedzieli się, że Amerykanie posiadają w Rosji ponad stu agentów. Każdych dwóch agentów dogaduje się ze sobą na jeden z 4 tajnych sposobów. Udowodnij, że istnieje trzech agentów porozumiejących się ze sobą w ten sam sposób.

13. Udowodnij, że wśród 21 osób istnieje grupa 6 osób taka, że wszystkie osoby w tej grupie znają wszystkie pozostałe osoby z tej grupy lub istnieje 3 osobowa grupa osób, w której wszystkie osoby się nie znają.

14. Na płaszczyźnie leży n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Udowodnić, że można znaleźć wśród nich parę prostych, przecinających się pod kątem nie przekraczającym $180°/n$.

15. Ze zbioru $\{1, \ldots, 100\}$ wybrano 51 liczb. Udowodnij, że istnieją wśród nich takie dwie liczby a, b, że:

$$(a)\ a - b = 1, \qquad (b)\ \mathrm{NWD}(a, b) = 1, \qquad (c^*)\ a \mid b.$$

16. Płaszczyzna jest pokolorowana na n kolorów. Udowodnij, że istnieje prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru.

17. Na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych dany jest wypukły sześciokąt, którego wszystkie wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Udowodnić, że jego pole wynosi co najmniej 3.

18. Wielokąt wypukły na płaszczyźnie zawiera co najmniej $m^2 + 1$ punktów kratowych (czyli punktów o współrzędnych całkowitych). Udowodnić, że ten wielokąt zawiera $m + 1$ punktów kratowych leżących na jednej prostej.

19. Wewnątrz okręgu o promieniu 10 wybrano 100 punktów. Udowodnij, że istnieje koło o promieniu 2, które zawiera przynajmniej 3 spośród tych punktów.

20. Niech C będzie okręgiem o promieniu 16 natomiast niech A będzie pierścieniem kołowym o wewnętrznym promieniu równym 2 i zewnętrznym promieniu równym 3. Rozpatrzmy zbiór S składający się 650 punktów wewnątrz C. Udowodnić, że pierścień kołowy A można położyć tak aby przykrył co najmniej 10 punktów zbioru S.