



Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 3 & 4 - Równania funkcyjne

II LO Kraków, 15.11 i 22.11.2024 r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

ZADANIA

Używamy następujących oznaczeń: przez \mathbb{R} oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych, przez \mathbb{R}_+ zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, przez \mathbb{Q} zbiór liczb wymiernych, przez \mathbb{Q}_+ zbiór liczb wymiernych dodatnich, a przez \mathbb{Z} oznaczamy zbiór liczb naturalnych.

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy.$$

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich liczb wymiernych x, y równość

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ spełniające dla wszystkich liczb wymiernych dodatnich x, y równość

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(x)}{f(y)} + 2y.$$

7. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniające dla wszystkich liczb całkowitych x, y równość

$$f(f(x)) = x + 2.$$

8. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x + y)^2 - f(x)f(y).$$

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x^2 + y) = f(x^3 + 7y) + f(x^4).$$

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ spełniające dla wszystkich liczb wymiernych dodatnich x równości

$$f(x + 1) = f(x) + 1, \quad f(x^3) = f(x)^3.$$

11. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich x, y równość

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy.$$

13. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich liczb wymiernych x, y równość

$$f(x + y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1.$$