Olimpijskie Warsztaty Matematyczne

Spotkanie 1 & 2 - **Liczenie w kombinatoryce**

II LO Kraków, 11.10 i 18.10.2024r.

Dominik Bysiewicz & Jakub Byszewski

TEORIA

- **Metoda "włącz-wyłącz"** to wzór pozwalający na policzenie ile sytuacji spełnia kilka warunków jednocześnie:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

oczywiście można to przełożyć w naturalny sposób na większą liczbę zdarzeń.

ZADANIA

1. Na ile sposobów pionek może przejść od punktu $(0,0)$ do $(2,3)$ poruszając się tylko w górę lub w prawo?
   Na ile sposobów może przejść od punktu $(0,0)$ do (n,k) poruszając się tylko w górę lub w prawo $(n,k>0)$?

2. Udowodnij w sposób kombinatoryczny:

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad b)\ k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

$$c)\ \#\{A, B \subseteq X = \{1, \ldots, n\} \mid A \subseteq B \subseteq X\} = 3^n.$$

3. Niech X będzie zbiorem n-elementowym. Oblicz sumę liczb elementów zbiorów $A \cap B$ wśród wszystkich par uporządkowanych (A,B) podzbiorów zbioru X.

4. Wyznaczyć liczbę takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

5. Na ile sposobów można przejść pionkiem z pola $A1$ na pole $H8$ szachownicy, jeżeli może poruszać się tylko w górę lub prawo? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli będzie przechodzić z jednego rogu do przeciwległego rogu planszy $a \times b$?

6. W poprzednim zadaniu usuwamy z szachownicy pola $B2$, $B7$, $G2$, $G7$. Na ile sposobów możemy teraz przejść pionkiem?

7. Dana jest tabliczka czekolady a) 4×6; b) $a \times b$. W każdym ruchu wybieram jeden kawałek leżący na stole (na początku muszę wybrać całą tabliczkę) i przecinam go wzdłuż linii podziału jednym cięciem. Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które trzeba wykonać, aby na stole pozostały same kwadraty jednostkowe?

8. Na stole leży n zapałek, które stanowią n jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos n-elementowy. Będzie to robił przy użyciu $n-1$ operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos a-elementowy ze stosem b-elementowym, dostaje od Bartka $a \cdot b$ cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu $n-1$ operacji? Odpowiedź uzasadnij.

9. Ile jest takich permutacji 26 liter alfabetu łacińskiego, które nie zawierają słowa "ryba", "krowa", ani "pies"?

10. Ile jest permutacji talii 52 kart, że żadne 2 damy nie sąsiadują ze sobą?

11. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb -1, 0 lub 1. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

12. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku.

13. Nad jeziorem stoi 23 kamieni tworzących okrąg. Na kamieniach siedzą 22 żaby, ponumerowane od 1 do 22 (każda ma inny numer). Co minutę żaba o numerze i wykonuje i skoków na sąsiedni kamień zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Udowodnij, że niezależnie od początkowego ustawienia (kilka żab może być na jednym kamieniu) w pewnej chwili przynajmniej 6 kamieni będzie pustych.