

Równanie $\sin x = \cos x$

Równanie $\sin x = \cos x$ i podobne możemy rozwiązać na wiele sposobów:

Sposób 1 (na tangensa).

I przypadek:

Jeśli $\cos x = 0$, to z równania mamy też $\sin x = 0$, a wtedy $\sin^2 x + \cos^2 x = 0 + 0 = 0 \neq 1$. Sprzeczność.

II przypadek:

Jeśli $\cos x \neq 0$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$), to dzielimy stronami i mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Sposób 2 (różnica sinusów).

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos x \\ \sin x - \cos x &= 0 \\ \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 0 \\ 2 \sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) &= 0 \\ 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} &= 0 \\ 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ x - \frac{\pi}{4} &= k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Sposób 3 (symetria wykresu).

Skorzystamy z własności: $\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \vee x = \pi - y + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ x &= \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} = -2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad \text{sprzeczność} \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Sposób 4 (graficzny).

Można bardzo dokładnie, na kratkach narysować oba wykresy i odczytać rozwiązania z wykresu. Jeśli $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$, to:

