Zadania dodatkowe

Termin: wrzesień

Zadanie 1. Za pomocą cyfr $2, 0, 2, 4$ w podanej kolejności połączonych znakami i symbolami matematycznymi utworzyć liczby od 1 do 20 (chętni mogą ciągnąć tę listę dalej... np. do 50).
Na przykład: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4$, $\quad 5 = 2^{0 \cdot 2} + 4$, $\quad 31 = -2^0 + \log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$.

Zadanie 2. Rozważmy bardo cienką powierzchnię np. chusteczkę[1] o grubości $0,1$ mm. Składamy ją na pół (ma grubość $0,2$ mm), znowu na pół (ma grubość $0,4$ mm), i tak składamy ją na pół łącznie 40 razy. Jakiej wysokości (grubości) będzie ten stosik?

Zadanie 3. Rozważmy nieskończoną sumę $\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi^2} + \frac{C_3}{\pi^3} + \frac{C_4}{\pi^4} + \ldots$, gdzie C_n oznacza n-tą cyfrę po przecinku[2] liczby π. Wykaż, że suma ta jest skończona (tzn. jest równa pewnej liczbie rzeczywistej).

Zadanie 4. Oblicz najmniejszą wartość wyrażenia: $x^{2024} + \frac{2024}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 5. Niech dane będzie równanie $x^3 + 2ax + b = 0$ (a, b – dane). Wykaż, że jeśli x_0 spełnia to równanie, to $x_0 b \leqslant a^2$.

Termin: październik

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

Zadanie 7. Rozważmy listę, która zawiera 2024 ponumerowane kolejno zdania. Zdanie n-te ma postać:

„Dokładnie n zdań na tej liście jest fałszywych."

Ile zdań jest prawdziwych i które?

Zadanie 8. Niech dany będzie zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$. Które liczby ze zbioru A spełniają implikację:

Jeżeli n jest parzysta, to n jest podzielna przez 4.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie liczby **niewymierne** a, dla których $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ są **wymierne**.

Zadanie 10. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające warunki: $a + b + c + d > 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$, $abc + abd + acd + bcd > 0$, $abcd > 0$. Wykaż, że każda z liczb a, b, c, d jest dodatnia.

[1] Jeśli ktoś uważa, że chusteczka jest za mała, by złożyć ją aż 40 razy, może wyobrazić sobie ogromną płachtę rozłożoną na bardzo dużym polu.

[2] Mowa oczywiście o standardowym rozwinięciu w systemie dziesiętnym tzn. $\pi = 3,1415926\ldots$.

Termin: listopad

Zadanie 11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = z^7 \\ y^4 + z^4 = x^7 \\ x^4 + z^4 = y^7 \end{cases}$$

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ jest nieparzysta.

Zadanie 13. Rozważmy kwadrat o boku 2, który dzielimy na cztery przystające kwadraty o boku 1. W każdy z tych małych kwadratów wpisujemy koło. Oblicz promień koła, którego środek jest środkiem dużego kwadratu i które jest styczne zewnętrznie do czterech małych kół.

Zadanie 14. Rozważmy analogiczną sytuację w 3D, tzn. sześcian o krawędzi 2, który dzielimy na osiem przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z tych małych sześcianów wpisujemy kulę. Oblicz promień kuli, której środek jest środkiem dużego sześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych kul.

Zadanie 15. Rozważmy analogiczną sytuację w dowolnym n-tym wymiarze, tzn. hipersześcian o krawędzi 2, który dzielimy na 2^n przystających sześcianów o krawędzi 1. W każdy z nich wpisujemy hiperkulę. Oblicz promień hiperkuli, której środek jest środkiem dużego hipersześcianu i która jest styczna zewnętrznie do małych hiperkul.

Rozwiązanie 1.

$1 = (2+0+2):4$
$2 = -2+0+2+\sqrt{4}$
$3 = -2^0+2+\sqrt{4}$
$4 = 2+0+\log_2 4$
$5 = 2^0+2+\sqrt{4}$
$6 = 2+0^2+4$
$7 = -2^0+2\cdot 4$
$8 = 2+0+2+4$
$9 = 2^0+2\cdot 4$
$10 = 2+0+2\cdot 4$
$11 = 2+0!+2\cdot 4$
$12 = (2^0+2)\cdot 4$
$13 = -2-0!+2^4$
$14 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} 4$
$15 = -2^0+2^4$
$16 = \left(2^{0+2}\right)^{\sqrt{4}}$
$17 = 2^0+2^4$
$18 = 2+0+2^4$
$19 = -(2+0!+2)+4!$
$20 = -2+0-2+4!$
$21 = -2^0-2+4!$
$22 = 2\cdot 0-2+4!$
$23 = 2^0-2+4!$
$24 = 2\cdot 0\cdot 2+4!$
$25 = -2^0+2+4!$
$26 = 2\cdot 0+2+4!$
$27 = 2^0+2+4!$
$28 = 2+0+2+4!$
$29 = 2+0!+2+4!$
$30 = -2+0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$31 = -2^0+\log_{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} 4$
$32 = (2+0)\cdot 2^4$

Rozwiązanie 2. Początkowa grubość to $0,2$ mm. Każde złożenie na pół podwaja grubość stosiku. Czynność tę wykonujemy 40 razy, więc końcowa wysokość to $0,1\cdot 2^{40}$ mm $= 109\,951\,162777,6$ mm ≈ 110 tys. km (!). Jest to prawie trzykrotnie więcej niż obwód Ziemi.
Osoby znające ciągi odnajdą w tym zadaniu ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0,1$ i ilorazie $q = 2$.

Rozwiązanie 3. Skoro C_n, to n-ta cyfra, to maksymalnie wynosi ona 9. Zachodzi więc poniższe oszacowanie:

$$\frac{C_1}{\pi}+\frac{C_2}{\pi^2}+\frac{C_3}{\pi^3}+\frac{C_4}{\pi^4}+\ldots<\frac{9}{\pi}+\frac{9}{\pi^2}+\frac{9}{\pi^3}+\frac{9}{\pi^4}+\ldots.$$

Ale tę sumę umiemy policzyć – jest to suma szeregu geometrycznego $\left(a_1=\dfrac{9}{\pi},\ q=\dfrac{1}{\pi}\right)$. Wynosi zatem

$S = \dfrac{\frac{9}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \dfrac{9}{\pi-1}(\approx 4,2)$. Szukana suma jest mniejsza niż S, a więc skończona.

Rozwiązanie 4.
Sposób I
Pod koniec klasy 3 poznaje się rachunek różniczkowy (pochodne) i wtedy można to zadanie rozwiązać „schematycznie" jako jedno z wielu zadań typu: „Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale".
Szkic: Szukamy za pomocą pochodnych ekstremów lokalnych wewnątrz przedziału, liczymy granice na krańcach przedziału, podajemy wartość największą i najmniejszą (jeśli istnieją).

Sposób II

Zauważmy, że $x^{2024}+\frac{2024}{x} = x^{2024}+\overbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}^{2024}$, a więc z nierówności między średnimi $(A-G)$:

$$\frac{x^{2024}+\frac{2024}{x}}{2025} \geqslant \sqrt[2025]{x^{2024}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{2024}} = 1,$$

czyli omawiane wyrażenie jest $\geqslant 2025$. Równość zachodzi, gdy wszystkie składniki są równe tzn. $x^{2024} = \frac{1}{x}$, czyli gdy $x=1$. Wtedy wartość wyrażenia wynosi $1^{2024}+\dfrac{2024}{1} = 2025$.

Rozwiązanie 5.
Sposób I - pomysłowy
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b=0$, co możemy „sprytnie" zapisać $x_0x_0^2+2ax_0+b=0\,(\star)$.

- Jeśli $x_0=0$, to $b=0$, a więc nierówność $x_0b\leqslant a^2$ jest prawdziwa.
- Jeśli $x_0\neq 0$, to równanie $(\star)$ oznacza, że liczba x_0 jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x_0x^2+2ax+b=0$, w szczególności $\Delta\geqslant 0$. A więc $4a^2-4x_0b\geqslant 0$, co po przekształceniu daje $x_0b\leqslant a^2$.

  Zadanie to pochodzi z 17. Olimpiady Matematycznej, z pierwszego etapu.

Sposób II
Skoro x_0 spełnia równanie, to: $x_0^3+2ax_0+b=0$, skąd $b=-x_0^3-2ax_0$.
Przekształcając równoważnie tezę mamy:

$$x_0b\leqslant a^2$$

$$-x_0^4 - 2ax_0 \leqslant a^2$$
$$x_0^4 + 2ax_0^2 + a^2 \geqslant 0$$
$$(a + x_0^2) \leqslant 0$$

co jest prawdą, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Rozwiązanie 6. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne zbiory puste: $\varnothing_1, \varnothing_2$. Wiemy, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, więc w szczególności $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ oraz $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$. Ale jeśli $A \subset B$ oraz $B \subset A$ to oznacza, że $A = B$, więc $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Istnieje zatem tylko jeden zbiór pusty.

Rozwiązanie 7. Na liście nie może być więcej niż jedno zdanie prawdziwe, bo wtedy koniunkcja dwóch różnych zdań byłaby fałszywa. Gdyby wszystkie 2024 zdania były fałszywe, to w szczególności ostatnie zdanie też, czyli nieprawdą jest, że 2024 zdania są fałszywe. Sprzeczność. Liczba zdań prawdziwych jest więc $\geqslant 1$ oraz $\leqslant 1$. Jest zatem dokładnie jedno zdanie prawdziwe, czyli 2023 fałszywe. Prawdziwe jest więc zdanie o numerze 2023.

Rozwiązanie 8. Implikacja jest fałszywa tylko w przypadku, gdy z prawdy wynika fałsz. Zatem liczby $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ spełniają implikację, bo poprzednik jest fałszywy. Ponadto spełniają ją też liczby $0, 4, 8, 12, 16, 20$ – dla nich poprzednik i następnik są prawdziwe. Implikacja nie jest spełniona tylko dla liczb: $2, 6, 10, 14, 18$, bo są to liczby parzyste, ale niepodzielne przez 4.

Rozwiązanie 9. Chcemy, aby $a^2 - 44a$ oraz $a^3 - 2015a$ były wymierne.
Rozpiszmy $a(a^2-44a) = a^3-44a^2 = a^3-2015a+2015a-44(a^2-44a+44a) = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+2015a-1936a = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+79a$. Stąd $a(a^2-44a) = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)+79a$, czyli $a(a^2-44a)-79a = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)$ i dalej $a[(a^2-44a)-79] = (a^3-2015a)-44(a^2-44a)$. Prawa strona jest wymierna, ponieważ różnica i iloczyn liczb wymiernych jest wymierny. Zatem lewa też. Ale lewa to iloczyn liczby niewymiernej oraz wymiernej. Taki iloczyn jest wymierny tylko gdy liczba wymierna jest równa 0, tj. $a^2 - 44a = 79$. Rozwiązaniami tego równania są: $a_1 = 22 + \sqrt{563} \vee a_2 = 22 - \sqrt{563}$. Obie te liczby spełniają warunki zadania, bo $a^2 - 44a = 79 \in \mathbb{Q}$ oraz $a^3 - 2015a = a(a^2 - 44a + 44a - 2015) = a(79 + 44a - 2015) = a(44a - 1936) = 44a(a - 44) = 44(a^3 - 44a) = 44 \cdot 79 \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązanie 10. Warunki w zadaniu kojarzą nam się z wzorami Viete'a stopnia 4. Rozważmy wielomian o pierwiastkach a, b, c, d, tj. $W(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, który po wymnożeniu przyjmuje postać ogólną $W(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ze wzorów Viete'a (i założeń):

- $-a_3 = a + b + c + d > 0 \Rightarrow a_3 < 0$
- $a_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0 \Rightarrow a_2 > 0$
- $-a_1 = abc + abd + acd + bcd > 0 \Rightarrow a_1 < 0$
- $a_0 = abcd > 0 \Rightarrow a_0 > 0$

Zatem dla $x \leqslant 0$ jest $W(x) > 0$,a wiec wielomian $W(x)$ ma tylko dodatnie pierwiastki. Stąd $a, b, c, d > 0$.

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury