

Zadania podsumowujące

Zadanie 1. Wykazać, że pierwiastek zespolony stopnia n z liczby różnej od zera ma dokładnie n elementów, które wyrażają się wzorami:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Zadanie 2. Udowodnić uwagę podaną na lekcji:

Liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez n wtedy i tylko wtedy, gdy $n \mid a - b$.

Zadanie 3. Rozważmy zbiór izometrii własnych trójkąta równobocznego (tzn. takich przekształceń płaszczyzny, które przekształcają go na siebie). Łatwo zauważyć, że elementami takiego zbioru są: $S_A, S_B, S_C, O_0, O_1, O_2$, gdzie np. S_A to symetria względem symetralnej przechodzącej przez wierzchołek A , zaś O_0 to obrót¹ o kąt 360° (lub 0°) względem środka trójkąta, O_1 o kąt 120° , a O_2 o kąt 240° . W tym zbiorze rozważmy działanie składania tych przekształceń, czyli np. $S_B \circ S_A := S_B(S_A)$, a więc najpierw wykonujemy S_A , a następnie S_B . Powyższy zbiór wraz z działaniem składania tworzy grupę, którą oznaczamy D_3 i nazywamy grupą diedralną (dihedralną) trójkąta równobocznego².

Proszę stworzyć tabelkę działania dla tej grupy i wskazać element neutralny i elementy symetryczne. (dla ambitnych: stworzyć tabelkę działania dla D_4 - czyli grupy izometrii własnych kwadratu)

Zadanie 4 (Kwaterniony). Rozważmy uogólnienie liczb zespolonych tzw. zbiór kwaternionów:

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} : \text{gdzie } a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wykazać, że zbiór $\mathbb{H}$ wraz ze zwykłym dodawaniem macierzy tworzy grupę abelową. Sprawdzić jakie własności ma $\mathbb{H}$ z mnożeniem macierzy.

Zadanie 5 (Grupa Heisenberga). Wykaż, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tworzy grupę.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy relacja $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określona wzorem $\forall m, n \in \mathbb{N} : nRm \Leftrightarrow n$ ma tyle samo cyfr co m , jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wyznaczyć jej klasy abstrakcji.

Zadanie 7. Wyznaczyć dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ określonej wzorem $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

Zadanie 8. Przy pomocy wzoru de Moivre'a wykazać wzory:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{oraz} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

W analogiczny sposób wyprowadzić wzory na $\sin 3x$ oraz $\sin 4x$.

Uwaga: W ten łatwy sposób możemy sobie wyprowadzić wzory na dowolną wielokrotność sinusa i cosinusa.

Zadanie 9. Rozważmy zbiór X o mocy n , tzn. $\#X = n$. Ile jest różnych relacji na zbiorze X ? Jak obliczyć liczbę relacji równoważności na tym zbiorze?

Zadanie 10. Rozważmy następujące przestrzenie

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) : \forall i \in \mathbb{N} \ x_i \in \mathbb{R}\}$ - zbiór ciągów,
- $c := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{istnieje } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}$ - zbiór ciągów, które mają granicę,
- $c_0 := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ - zbiór ciągów, które mają granicę równą 0,
- $c_{00} := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N \ \forall n \geq N : x_n = 0\}$ - zbiór ciągów, które od pewnego wyrazu są stale równe 0.

¹Obroty oczywiście są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

²Można oczywiście mówić o grupie diedralnej dowolnego wielokąta foremnego. W ogólności jest to więc grupa złożona z n symetrii osiowych oraz n obrotów - każdy o kąt $\frac{360^\circ}{n}$. Łatwo zauważyć, że taka grupa diedralna n -kąta ma $2n$ elementów. Dlatego są dwie konwencje jej oznaczania: D_n lub D_{2n} .

W każdym z tych zbiorów wprowadźmy naturalne działanie, jakim będzie dodawanie po współrzędnych tzn.:

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots).$$

Udowodnić, że $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ tworzy grupę. Uzasadnić, że działanie $+$ jest wewnętrzne w c, c_0, c_{00} oraz sprawdzić, czy te przestrzenie wraz z $+$ też tworzą grupy.

Zadanie 11. W zbiorze silnie monotonicznych funkcji liniowych $L := \{ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ wprowadzamy działanie składania funkcji $\circ$ (tzn. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$). Wykazać, że $(L, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 12. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 utworzono dwie liczby czterocyfrowe w ten sposób, że każdą cyfrę użyto dokładnie raz. Wykaż, że suma tych liczb jest podzielna przez 9.

Zadanie 13. Kostką dyskretną wymiaru n nazywamy zbiór $\{-1, 1\}^n$ (jest to zbiór wierzchołków kostki $[-1, 1]^n$). Wprowadźmy działanie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$. Wykaż, że $\cdot$ jest działaniem w $\{-1, 1\}^n$ oraz, że $(\{-1, 1\}^n, \cdot)$ jest grupą.

Zadanie 14. Niech X oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, które mają parzystą liczbę elementów i zdefiniujmy relację $R \subset X \times X$ warunkiem $ARB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Narysuj graf tej relacji.

Zadanie 15. Czy relacja określona na zbiorze liczb rzeczywistych warunkiem $xRy \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ jest słaboantysymetryczna?

Zadanie 16 (Matura międzynarodowa 1995). Rozwiąż równanie $AB = C$, jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & -2 \\ 4 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 17 (Matura międzynarodowa 1995). Rozwiąż równanie:

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 18 (Matura międzynarodowa 1995). Podaj dwie liczby sprzężone z_1, z_2 , które nie leżą ani na osi rzeczywistej, ani urojonej oraz spełniają równanie $z_1 \cdot z_2 = 10$.

Zadanie 19 (Matura międzynarodowa 1995). Utwórz i porównaj³ tabelki Cayley'a dla następujących grup:

- zbiór $\{1, i, -1, -i\}$ z mnożeniem liczb zespolonych,
- zbiór $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ z mnożeniem macierzy.

³W oryginale należało wykazać, że grupy te są izomorficzne.