Ciągi

1. Uzasadnij, że suma wszystkich liczb naturalnych nieparzystych czterocyfrowych mniejszych od 5000 jest równa 6000000.
2. Udowodnij, że jeżeli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i czwartego, to wyraz szósty jest średnią geometryczną wyrazu czwartego i dziewiątego.
3. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.
4. Wykaż, że jeżeli S_n, S_{2n} i S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), to $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.
5. Wykaż, że jeżeli ciąg $(ab,\ b^2,\ c^2)$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(b, c, 2b - a)$ jest ciągiem geometrycznym.
6. Trzy różne liczby rzeczywiste różne od zera tworzą ciąg arytmetyczny, a kwadraty tych liczb zapisane w tym samym porządku tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, ze iloraz q tego ciągu jest równy $q = (\sqrt{2} - 1)^2$ lub $q = (\sqrt{2} + 1)^2$.
7. Uzasadnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = a_{n+1} + a_n$ też jest ciągiem geometrycznym.
8. Uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+2} - \frac{3n^2+1}{n^2+4}\right) = -2$,
9. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x+3} + \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2} + \frac{(x+1)^3}{(x+3)^3} + \cdots$. Uzasadnij, że zbiór wartości tej funkcji $ZW = (-\frac{1}{2};\ \infty)$.
10. Suma trzech pierwszych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 21, zaś suma trzech następnych wyrazów jest równa $\frac{21}{64}$. Uzasadnij, że suma wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $21\frac{1}{3}$.
11. Uzasadnij, że istnieje jedna liczba naturalna spełniająca równanie $x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \cdots = 1$.