Równania i nierówności

1. Uzasadnij, że równanie $|9 - x| = \frac{20}{x}$ ma trzy pierwiastki, w tym jeden pierwiastek, który jest liczbą niewymierną.

2. Uzasadnij, że istnieje tylko jedna liczba całkowita spełniająca równanie $\frac{|x|}{x}(x+1) = 1$.

3. Wykaż, że istnieje jedna liczba naturalna spełniająca równanie $x^2 + x^3 + x^4 = 3$.

4. Uzasadnij, że równanie $|x - |x| - 2| = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$.

5. Wykaż, że równanie $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - |x + 2| = k$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $k \in \{-5, 5\}$.

6. Uzasadnij, że równanie $\big||2x + 5| - 4\big| = 3$ ma cztery różne rozwiązania.

7. Uzasadnij, że jeżeli $m > 0$, to dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^3 + mx^2 + m(m+1)x - (m+1)^2 = 0$.

8. Uzasadnij, że równanie $(m-2)x^4 - 2(m+3)x^2 + m - 1 = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste dla $m \in (2;\ \infty)$.

9. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniająca nierówność $\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| < 2$ jest liczba 2.

10. Uzasadnij, że równanie $x^3 + mx + k = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste takie, że $x_1 = x_2 = x_3 - 3$ wtedy, gdy $m = -3$ i $k = 2$.

11. Wykaż, że liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

12. Dane są dwie funkcje $f(x) = x^2 + mx + 1$ i $g(x) = x^2 + x + m$. Uzasadnij, że funkcje mają wspólne miejsca zerowe dla $m = -2$.

13. Uzasadnij, że równanie $x^2 - (k-1)x + 2k - 5 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest mniejsze od -1, a drugie jest dodatnie dla $k \in (-\infty; \frac{5}{3})$.

14. Uzasadnij, że suma współczynników wielomianu $W(x) = 5(x^2 - 4x + 4)^{2016} - 4(x^3 + 2x^2 - 4)^{2015}$ jest równa 9.