Wyrażenia algebraiczne

1. Wykaż, że wyrażenie $\sqrt{4x^2+12x+9}+2\sqrt{x^2-12x+36}$ ma stałą wartość dla $x \in (-1;5)$.

2. Wykaż, że jeżeli $a+b=4$, $a \in R$ i $b \in R$, to $a^2+b^2 \geq 8$.

3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x, y, z zachodzi nierówność $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.

4. Wykaż, że jeżeli $xy > 0$, to $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

6. Wykaż, że jeżeli $x+y+z=0$, to $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

7. Wykaż, że jeżeli $yz \neq 0$ i $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, to $\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2}=\frac{x^2}{y^2}$.

8. Udowodnij, że jeżeli liczba $x+\frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to liczba $x^3+\frac{1}{x^3}$ jest też liczbą całkowitą.

9. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych różnych od zera zachodzi nierówność $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$.

10. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z, k prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(x+z)(y+k)} \geq \sqrt{xy}+\sqrt{zk}$.

11. Udowodnij, że jeśli dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z spełniony jest warunek $x^2+y^2+z^2=\sqrt{3}$, to $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \leq 1$.

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b i takich, że $a^2+b^2=4$, zachodzi nierówność $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2}-1$.