

---

## Rodzaje dowodów

---

Przypomnijmy, że wyróżniamy 4 główne metody dowodzenia twierdzeń:

- a) **wprost** – rozpoczynamy od założeń lub wcześniej udowodnionych twierdzeń, a następnie przeprowadzając logiczne rozumowanie dochodzimy do tezy,
  - b) **nie wprost** – polega on na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności. Zatem dane twierdzenie należy uznać za prawdziwe,
  - c) **przez kontrapozycję**<sup>1</sup> – stosujemy prawo kontrapozycji, czyli zamiast dowodzić implikacji  $p \Rightarrow q$  dowodzimy implikację  $\neg q \Rightarrow \neg p$ ,
  - d) **przez indukcję** – stosujemy zasadę indukcji matematycznej. Tą metodą dowodzimy twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.
- 

Poniżej znajdują się 4 zadania na dowodzenie. W każdym przypadku zapisz założenie i tezę, na następnie rozwiąż zadanie wskazaną metodą.

**Zadanie 1** (Wprost).

Udowodnij, że sześćcian dowolnej liczby całkowitej dającej resztę 3 z dzielenia przez 8 daje resztę 3 z dzielenia przez 4.

**Zadanie 2** (Nie Wprost).

Udowodnij, że liczba  $\log_2 7$  jest niewymierna.

**Zadanie 3** (Przez Kontrapozycję).

Udowodnij, że dla  $a > 0$  zachodzi nierówność:  $(1 + a + a^2)^2 \leq 3(1 + a^2 + a^4)$

**Zadanie 4** (Przez Indukcję).

Udowodnij, że dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  zachodzi nierówność:  $2^{n-1} < n!$ .

---

### Zadanie domowe

---

**Zadanie 5** (Wprost).

Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb nieparzystych daje resztę 3 z dzielenia przez 6.

**Zadanie 6** (Nie Wprost).

Udowodnij, że liczba  $\log_3 13$  jest niewymierna.<sup>2</sup>

**Zadanie 7** (Przez Kontrapozycję).

Udowodnij, że dla  $x > 0$  zachodzi nierówność:  $x + \frac{4}{x^2} \geq 3$ .

**Zadanie 8** (Przez Indukcję).

Udowodnij, że dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 10$  zachodzi nierówność:  $2^n > n^3$ .

---

**Zadanie 2024.**

Używając dowodzenia wprost i nie odwołując się do monotoniczności funkcji  $t \mapsto t^3$  (czyli nie podnosząc po prostu obustronnie do potęgi trzeciej), uzasadnij, że jeśli  $x \leq y$ , to  $x^3 \leq y^3$ .

---

<sup>1</sup>Warto zwrócić uwagę, że dowód przez kontrapozycję jest tak naprawdę dowodem nie wprost, w którym sprzeczność uzyskuje się bezpośrednio z założeniem.

<sup>2</sup>Zastanowić się, jak zmieni się rozumowanie, gdy podstawa logarytmu będzie ułamkiem.