Twierdzenie Ptolemeusza

Twierdzenie 1 (Ptolemeusz)**.**
Czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn długości przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków, tzn.

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Zadanie 1. Na pięciokącie foremnym o boku długości 1 opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej pięciokąta.

Zadanie 2. Powiemy, że dwie liczby a i b $(a > b)$ są w złotym stosunku, jeśli zachodzi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$ [1]

Udowodnić, że przekątna i bok pięciokąta foremnego są w złotym stosunku.

Zadanie 3. Wykorzystując tw. Ptolemeusza udowodnij twierdzenie Pitagorasa.

Zadanie 4. W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC. Niech M będzie dowolnym punktem tego okręgu. Udowodnić, że, jedna z odległości $|AM|, |BM|$ lub $|CM|$ jest równa sumie dwóch pozostałych.

Zadanie 5. Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC (gdzie $|\sphericalangle C| = 90^\circ$ oraz a, b, c - boki trójkąta) zbudowano (na zewnątrz trójkąta) kwadrat. Oblicz odległość punktu P – przecięcia przekątnych kwadratu od punktu C jeśli $a + b = k$, gdzie k jest dniem miesiąca, w którym się urodziłeś/aś.

Zadanie 6. [2] Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Na odcinkach AB, AC, AD wybrano odpowiednio punkty P, Q, R, tak, że na czworokącie $APQR$ można opisać okrąg. Udowodnij, że $|AR| \cdot |AD| + |AP| \cdot |AB| = |AQ| \cdot |AC|$.

⊠ **Zadanie 7.** Punkt P leży na krótszym łuku CD okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykazać, że $|AP| + |CP| = \sqrt{2} \cdot |BP|$.

Piotr Bury

[1] Można wyliczyć, że stosunek ten wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$. Liczbę tą oznaczamy grecką literą φ od rzeźbiarza greckiego – Fidiasza.

[2] Zadanie pochodzi z finału Powszechnego konkursu Internetowego dla uczniów szkół średnich organizowanego przez Politechnikę Warszawską, 2013.