

Zadania uzupełniające - rachunek różniczkowy

Zadanie 1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres

- a) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$
 b) $f(x) = x - 2 + \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-2}{(x-5)^2} + \dots$
 c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Zadanie 2. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\frac{2x^2}{(2-x)^2} = 1 - m$ w zależności od wartości parametru m .

I sposób (uproszczony¹ przebieg zmienności) – **zadanie domowe**

II sposób (równanie kwadratowe z parametrem)

Zadanie 3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$, a następnie korzystając z otrzymanego

wykresu zbadaj liczbę rozwiązań równania $\left| x + \frac{4}{x-2} \right| = m$ w zależności od wartości parametru m .

Narysuj wykres funkcji $y = g(m)$, która każdej wartości m przypisuje liczbę rozwiązań powyższego równania.

Zadanie 4 (matura maj 2018). Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

- a) Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
 b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się

$$\text{wzorem } L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$$

- c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

- **Zadanie 5** (matura 1973, Kielce). Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa $4k$. Jakie powinny być wymiary prostopadłościanu, aby jego objętość była największa?

Zadanie 6 (matura 1974, Bydgoszcz, klasy mat-fiz). Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratu ma długość d . Wyznaczyc długość krawędzi tego prostopadłościanu tak, aby jego objętość była największa.

Zadanie 7 (Egzamin wstępny na Politechnikę Łódzką/studia dla pracujących). W półkole o promieniu r wpisano trapez, którego jedna podstawa jest średnicą półkola. Przy jakiej wysokości trapezu ma on największe pole?

Zadanie 8 (baaaardzo ciężkie rachunki). Z helikoptera znajdującego się na wysokości 60 m nad powierzchnią morza wysłano promień światła do nurka znajdującego się na głębokości 40 m pod powierzchnią wody. Odległość w poziomie między helikopterem i nurkiem jest równa 110 m. Przyjmujemy, że prędkość światła w powietrzu to 300 000 km/s, a – w wodzie to 225 000 km/s. Wiedząc, że światło „wybiera” taką drogę, na przebycie której potrzeba najmniej czasu, znaleźć punkt, w którym promień wszedł do wody, tzn. znaleźć odległość tego punktu od punktu na powierzchni wody, nad którym znajduje się helikopter.

Zadanie 9. Słup ma wysokość 12 m. W odległości 8 m od słupa stoi dziecko wzrostu 100 cm. Znaleźć wysokość x , na której należy umieścić lampę, by odległość $d(x)$ lampy od końca cienia dziecka była najmniejsza.

¹Nie trzeba badać drugiej pochodnej, ani tworzyć tabelki.

Zadanie 10 (matura maj 2020). Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe $0,5$ cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe $0,3$ cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm². Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.

