$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury 15.08.2025

Niepełny kwadrat

Wykażemy poniższe twierdzenie:

Twierdzenie.
Zachodzą następujące nierówności:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x^2 + xy + y^2 \geqslant 0,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x^2 - xy + y^2 \geqslant 0.$$

Ponadto równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = 0$.

Dowód 1.
Zdefiniujmy funkcję dwóch zmiennych: $f(x,y) := x^2+xy+y^2$. Następnie obliczmy jej pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x.$$

Punkty krytyczne obliczamy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -4x + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Jedynym punktem krytycznym jest więc $P(0,0)$. Sprawdźmy, czy jest w nim ekstremum, a jeśli tak, to jakie. W tym celu wyznaczymy pochodne cząstkowe rzędu 2 oraz hesjan w punkcie P.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1,$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ
$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$, to funkcja f w punkcie $P(0,0)$ posiada lokalne minimum.
Ponadto dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ macierz $H_f(x,y)$ jest dodatnio określona, więc minimum to jest globalne.
Co więcej wynosi ono $f(0,0) = 0$.

$\square$

W elementarny sposób możemy wykazać to następująco:

Dowód 2.
$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geqslant 0$,
tak więc nierówność jest wykazana.
Pokażemy teraz drugą część twierdzenia.
Załóżmy, że $x^2 + xy + y^2 = 0$. Z powyższego rozumowania wynika, że $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0$. Mamy tutaj kwadraty pewnych liczb, a ich suma jest zero tylko wtedy, gdy są one równe zero. Otrzymujemy więc:

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \quad \wedge \quad \frac{3y^2}{4} = 0,$$

skąd szybko uzyskujemy

$$x + \frac{y}{2} = 0 \quad \wedge \quad y^2 = 0.$$

Drugie z tych równań implikuje fakt, że $y = 0$. Wstawiając ten wynik do równania pierwszego otrzymujemy $x = 0$.
Implikacja w drugą stronę jest trywialna. Istotnie, jeśli $x = y = 0$, to $x^2 + xy + y^2 = 0$. $\square$

Poniżej przedstawiam jeszcze kilka innych pomysłów (pomijam już dowód, gdy zachodzi równość, ponieważ w jedną stronę implikacja jest trywialna (dowód powyżej), a w drugą bazuje na podobnych przekształceniach).

Dowód 3.
Wiemy, że prawdą jest $(x+y)^2 \geqslant 0$ oraz $x^2+y^2 \geqslant 0$. Stąd $\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant 0$ jako suma dwóch nieujemnych składników. Przepiszmy i przekształćmy ostatnią nierówność:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant 0 \\
\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geqslant 0 \\
\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geqslant 0 \\
x^2 + xy + y^2 \geqslant 0
\end{gathered}$$

□

Dowód 4.
Załóżmy nie wprost, że zachodzi nierówność $x^2+xy+y^2 < 0$. Stąd $xy < -x^2-y^2$, a stąd znów $xy < 0$. Tak więc $2xy < xy < -x^2-y^2$, skąd $2xy < -x^2-y^2$. To jest zaś równoważne $x^2+2xy+y^2 < 0$. Po lewej stronie nierówności dostrzegamy wzór skróconego mnożenia i ostatecznie otrzymujemy: $(x+y)^2 < 0$, co jest sprzecznością. Tak więc $x^2+xy+y^2 \geqslant 0$. □

Dowód 5.
Załóżmy nie wprost, że zachodzi nierówność $x^2+xy+y^2 < 0$. Dodając do obu stron nierówności wyrażenie xy otrzymujemy: $x^2+2xy+y^2 < xy$, co jest równoważne $(x+y)^2 < xy$. Stąd $xy > 0$ ($\bigstar$).
Odejmując teraz $3xy$ od obu stron nierówności $x^2+xy+y^2 < 0$ otrzymujemy $x^2-2xy+y^2 < -3xy$, co jest równoważne $(x-y)^2 < -3xy$. Stąd $-3xy$, czyli też xy jest większe od 0. Otrzymujemy sprzeczność z ($\bigstar$). Tak więc $x^2+xy+y^2 \geqslant 0$. □

Drugą część twierdzenia, tzn. fakt, że równość zachodzi tylko w przypadku $x = y = 0$ możemy pokazać również w następujący ciekawy sposób.

Dowód 6.
Sprawdziliśmy już wcześniej, że para $x = 0 \wedge y = 0$ spełnia oczekiwaną równość. Pokażemy, że innych rozwiązań nie ma. Możemy teraz założyć, że $y \neq 0$, ponieważ dla $y = 0$ otrzymujemy $x = 0$, czyli wyznaczone już rozwiązanie. Podzielmy więc naszą równość $x^2+xy+y^2 = 0$ przez y^2. Otrzymujemy:

$$\frac{x^2+xy+y^2}{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 = 0$$

Podstawiamy $t = \dfrac{x}{y}$ i mamy

$$\begin{gathered}
t^2 + t + 1 = 0 \\
\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{ brak miejsc zerowych,}
\end{gathered}$$

a więc dla żadnych x, y równanie

$$\frac{x^2+xy+y^2}{y^2} = 0$$

nie ma rozwiązania, co kończy dowód. □

Drugą nierówność tzn. tę z minusem dowodzimy analogicznie jak pierwszą.

Wniosek.
Równania z niepełnym kwadratem, tzn. równania postaci $x^2+ax+a^2 = 0$ oraz $x^2-ax+a^2 = 0$, gdzie $a \neq 0$, nie mają rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych[1].

$\mathbb{P}$iotr $\mathbb{B}$ury

[1] Wniosek ten można jeszcze bardziej uogólnić, tzn. wziąć niepełny kwadrat pochodzący od wyrażeń $(bx+a)^2$ lub $(bx-a)^2$, gdzie $a, b \neq 0$.