Czy koło może być kwadratowe?

Postaramy się od bardzo prostej intuicji przejść do odpowiedzi na pytanie postawione w temacie. Zastanówmy się na początku, ***czy z Krakowa jest bliżej do Warszawy, czy do Zakopanego.*** Szybkie spojrzenie na mapę pozwala stwierdzić, że znacznie bliżej jest do Zakopanego. Podajmy też dokładne odległości. Z Krakowa do Warszawy jest 252 km, zaś z Krakowa do Zakopanego tylko 85 km.

Gdybyśmy jednak chcieli dostać się z Krakowa do tych miast pociągiem, to wtedy sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Podróż Kraków-Warszawa trwa pociągiem Pendolino 2h i 38 minut, zaś pokonanie trasy Kraków-Zakopane zajmie nam aż 3h i 20 minut. A co gdy rozważymy czas podróży samolotem, samochodem?

Można by też zastanowić się, kto z Was mieszka najdalej od sali, w której mamy zajęcia. Praktycznym było by powiedzenie, że najdalej ma ten, kto będzie najpóźniej w domu. Jednak w tej sytuacji prawdziwa odległość w kilometrach nie pokryje się z czasem powrotu do domu. Jest to spowodowane tym, że jedna osoba jedzie autobusem, inna tramwajem, ktoś idzie na piechotę, a jeszcze kogoś podwożą rodzice.

Te sytuacje pozwalają wysnuć wniosek, że ***odległość między tymi samymi punktami może być liczona w różny sposób.***

Odległość ta nie może być jednak zdefiniowana dowolnie. Musi ona spełniać 4 naturalne warunki:

- odległość dwóch różnych punktów jest większa od 0.
- odległość punktu od siebie samego wynosi 0.
- odległość z A do B jest taka sama jak z B do A.
- jeśli poruszamy się z A do B i chcemy po drodze odwiedzić C, to odległość może się jedynie zwiększyć (nie może się zmniejszyć).

Każdy sposób mierzenia, który spełnia powyższe warunki możemy nazwać ***odległością***. Bardziej formalnie tę odległość nazywamy ***metryką***. Odległość między punktami A i B będziemy krótko oznaczać $d(A, B)$. Uściślijmy teraz nasze rozumowanie i postawmy następującą definicję:

Definicja
Niech X będzie niepustym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nazywamy ***metryką*** w zbiorze X, jeśli spełnia następujące warunki:

(1) $\forall x, y \in X : \quad d(x, y) \geqslant 0.$
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (x, y \in X).$
(3) $\forall x, y \in X : \quad d(x, y) = d(y, x).$
(4) $\forall x, y, z \in X : \quad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$

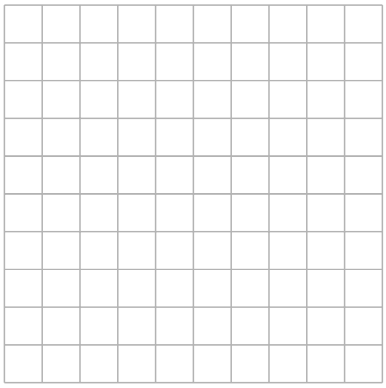
Spróbujmy teraz bardzo intuicyjnie, ale z drugiej strony też precyzyjnie zdefiniować koło. Jak wiemy, koło jest jednoznacznie wyznaczone przez środek i promień. Niech więc S będzie ustalonym punktem, zaś r liczbą dodatnią. Wtedy ***kołem o środku w punkcie S i promieniu r*** nazywamy zbiór tych punktów, których odległość od środka S jest mniejsza lub równa od promienia r. Takie koło będziemy oznaczać $K(S, r)$.

Nasza intuicja podpowiada, że aby narysować np. koło o środku S i promieniu 5 to wbijamy nóżkę cyrkla w punkcie S, ustalamy rozwartość cyrkla na 5 i rysujemy ładny idealny okrąg. Zamalowując wszystkie punkty wewnątrz otrzymujemy koło. Ta intuicja jest dobra, ale tylko gdy mamy do czynienia ze „zwykłą" odległością. Dlatego w dalszej części zajęć musimy się tej intuicji pozbyć. Czym szybciej porzucimy myśl, że mierzyć można tylko po linii prostej oraz że że koło musi wyglądać zawsze tak samo, tym lepiej.

Dokonamy teraz przeglądu najbardziej znanych odległości (metryk) i spróbujemy narysować, jak wyglądają koła, gdy mierzymy w inny sposób. Będziemy rysować $K(S, 2)$, czyli koła o promieniu 2.

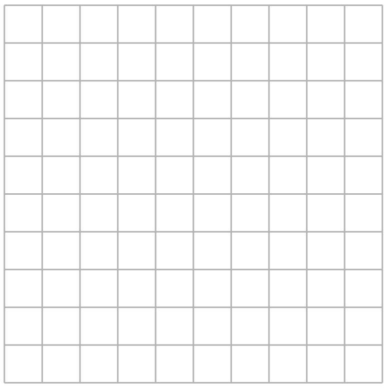
I. ODLEGŁOŚĆ EUKLIDESOWA

Jest to zwykła, intuicyjna odległość. Mierzymy po najkrótszej linii. Nazwa pochodzi od imienia greckiego matematyka Euklidesa, którego uznaje się za twórcę geometrii.



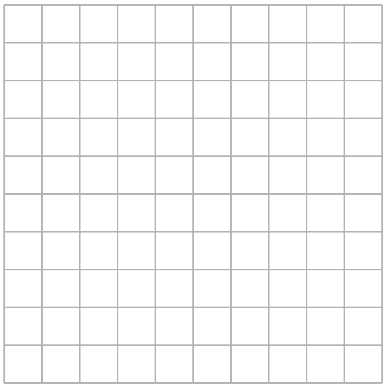
II. ODLEGŁOŚĆ MIEJSKA (MANHATTAŃSKA, TAKSÓWKOWA)

W tej metryce poruszamy się wyłącznie po liniach poziomych i pionowych. Nie możemy poruszać się po skosie. Tak więc nieformalnie możemy zapisać:
$d(A, B) =$ suma odległości poziomej i pionowej.



III. ODLEGŁOŚĆ MAKSIMUM

W tym przypadku również poruszamy się tylko poziomo lub pionowo. Jednak, w odróżnieniu od metryki miejskiej, nie sumujemy odległości pionowej i poziomej lecz wybieramy większą z nich. Nieformalnie możemy zapisać: $d(A, B) =$ większa z odległości poziomej lub pionowej.



IV. ODLEGŁOŚĆ DYSKRETNA

Ta metryka jest jedną z najprostszych. Definiujemy ją następująco:

$$d(A,B)=\begin{cases}0, & \text{gdy } A=B\\ 1, & \text{gdy } A\neq B\end{cases}$$

$K(S,2)$ $K\left(S,\frac{1}{2}\right)$

V. ODLEGŁOŚĆ URZĘDU POCZTOWEGO

Mamy wyróżniony punkt P - poczta. Aby dojść z A do B musimy przejść przez pocztę. Nazwa tej metryki wzięła się od intuicji: aby wysłać do kogoś list musimy zanieść go na pocztę, a następnie poczta rozwozi go dalej. Odległość jest więc dana wzorem:

$$d(A,B)=\begin{cases}0, & \text{gdy } A=B\\ |AP|+|PB|, & \text{gdy } A\neq B\end{cases}$$

$S=P$ $|SP|>2$ $|SP|\leqslant 2$

VI. ODLEGŁOŚĆ WĘZŁA KOLEJOWEGO (METRA, METRA PARYSKIEGO)

Mamy jeden punkt wyróżniony będący węzłem. Niech to będzie punkt O. Jeśli chcemy przesiąść się na ***inną*** linię to musimy dojechać do węzła. Możemy więc zapisać:

$$d(A,B)=\begin{cases}|AO|+|OB|, & \text{gdy } A,B,O \text{ nie są współliniowe}\\ |AB|, & \text{gdy } A,B,O \text{ są współliniowe}\end{cases}$$

$S=O$ $|OS|>2$ $|OS|\leqslant 2$

VII. ODLEGŁOŚĆ RZEKI (GĘSTEGO LASU, DŻUNGLI)

Mamy na płaszczyźnie wyróżnioną prostą, która jest rzeką. Możemy poruszać się jedynie prostopadle do rzeki oraz wzdłuż rzeki (zakładamy, że rzeka jest wąska, czyli można przez nią przejść). Intuicyjnie możemy sobie wyobrazić, że w buszu afrykańskim dzikie plemiona utworzyły sobie ścieżki do rzeki, aby czerpać wodę. Jednak w poprzek są zbyt gęste krzaki, więc nie można przez nie przejść. Definicja tej metryki przedstawia się więc następująco:

$$d(A,B) = \begin{cases} |AA'| + |A'B'| + |B'B|, & \text{gdy odcinek } AB \text{ nie jest prostopadły do rzeki} \\ |AB|, & \text{gdy odcinek } AB \text{ jest prostopadły do rzeki} \end{cases}$$

gdzie A' i B' to rzuty prostopadłe punktów A i B na rzekę.

S nie leży na rzece oraz odległość S od rzeki jest większa niż 2

S leży na rzece

S nie leży na rzece oraz odległość S od rzeki jest mniejsza lub równa 2

VIII. ODLEGŁOŚĆ MOSTU

Mamy na płaszczyźnie wyróżnioną prostą, która jest rzeką. Na rzece znajduje się punkt M - most. Aby przejść na drugą stronę musimy przejść przez most. Po tej samej stronie rzeki mierzymy odległość normalnie. Metryka mostu jest więc dana wzorem:

$$d(A,B) = \begin{cases} |AM| + |MB|, & \text{gdy } A, B \text{ są po przeciwnych stronach rzeki} \\ |AB|, & \text{gdy } A, B \text{ są po tej samej stronie rzeki} \end{cases}$$

$S = M$

$S \neq M$ oraz $|SM| > 2$ oraz odległość S od rzeki $\leqslant 2$

$S \neq M$ oraz $|SM| > 2$ oraz odległość S od rzeki > 2 $S \neq M$ oraz $|SM| < 2$

IX. ODLEGŁOŚĆ KONIKA SZACHOWEGO

Tym razem nie rozpatrujemy płaszczyzny, lecz nieskończoną szachownicę. Wiemy, że konik szachowy porusza się po literze L. Każdy skok traktujemy jako przebycie drogi o długości 1. Samą odległość między dwoma punktami na szachownicy definiujemy następująco:
$d(A, B)=$ minimalna liczba ruchów, jaką musi wykonać konik szachowy idąc z A do B.