## Zadanie 1. (0–6)

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \qquad (1)$$

z niewiadomymi $x$ i $y$ oraz parametrem $m \in \mathbb{R}$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których układ jest oznaczony, a para liczb $(x, y)$ będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.**
**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 2. (0–3)

Dane są liczby $a = \left(\log_{\sqrt{5}} 2\right) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$.

**Oblicz $a^{b+1}$.**

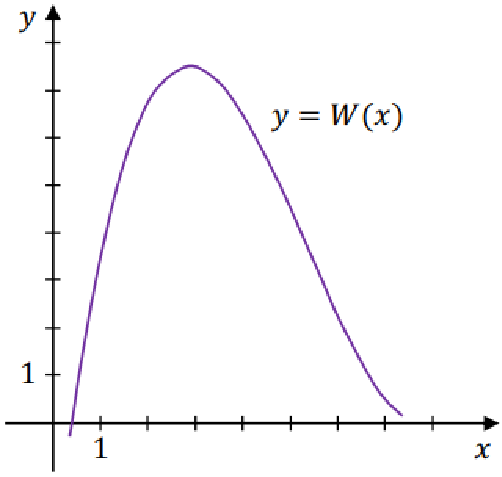
## Zadanie 3. (0–3)

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu $W$ określonego wzorem

$$W(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + \frac{67}{8}x - 3$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu $W$.**
**Zapisz obliczenia.**




## Zadanie 4. (0–3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 13$.

Punktem kratowym nazywamy punkt w kartezjańskim układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

**Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji $f$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 5. (0–3)

Wielomian $W$ jest określony wzorem $W(x) = (x - 1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których wielomian $W$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 6. (0–4)

Funkcja kwadratowa $f$ jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p - 1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $p$, dla których funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o $1$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 7. (0–3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1, +\infty)$.

**Wykaż, że $f$ jest funkcją rosnącą.**

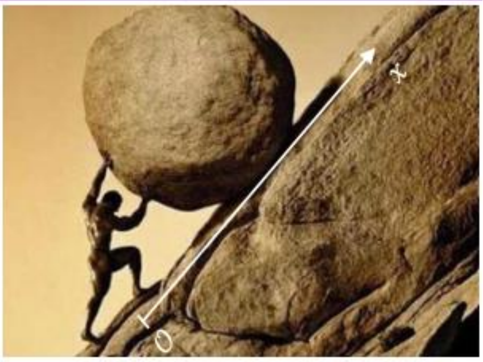
## Zadanie 8. (0–2)

**Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 9. (0–4)

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie $O$ oddalonym od szczytu o $4$ km, a położenie $x$ Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane zależnością

$$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \text{ dla } t \in [0, 24]$$

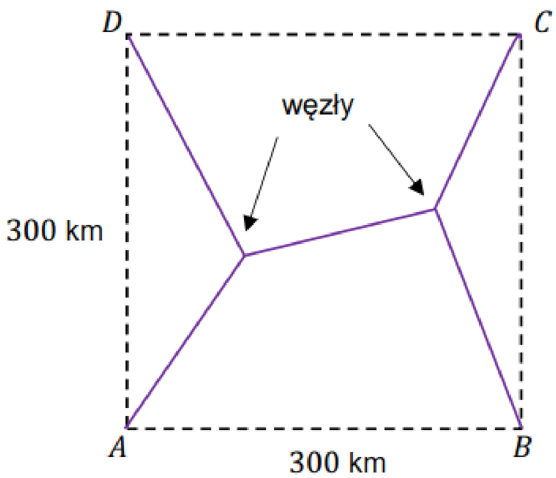



gdzie $x$ jest wyrażone w metrach, a $t$ – w godzinach.
Oś $Ox$ jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

**Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz największą prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 10. (0–6)

Cztery miasta $A, B, C$ i $D$ znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku $300$ km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na poniższym rysunku).




**Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 11. (0–3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla każdego $x > 0$.

**Wykaż, że funkcja $f$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.**

## Zadanie 12. (0–4)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot (2x+1)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 13. (0–4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym $(a_n)$, określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa $6$.

**Wyznacz wzór ogólny na $n$–ty wyraz ciągu $(a_n)$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 14. (0–3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**Wykaż, że liczba $5$ należy do zbioru wartości tej funkcji.**

## Zadanie 15. (0–3)

**Rozwiąż równanie**

$$(3 - 2\cos x)^2 = 8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 8\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 12$$

**w zbiorze $(0, \pi)$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 16. (0–3)

**Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.**

## Zadanie 17. (0–3)

Ciąg $(a_n)$ jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right)$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $p$, dla których granica ciągu $(a_n)$ jest równa $12$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 18.

Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa $80$, pole powierzchni całkowitej jest równe $256$ i długości wszystkich krawędzi są nie mniejsze niż $4$.

## Zadanie 18.1. (0–4)

**Wykaż, że układ równań**

$$4a + 4b + 4c = 80 \qquad (1)$$

$$2ab + 2bc + 2ca = 256 \qquad (2)$$

**z niewiadomymi $a$ oraz $b$ ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od $4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$.**

## Zadanie 18.2. (0–4)

Objętość $V$ każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

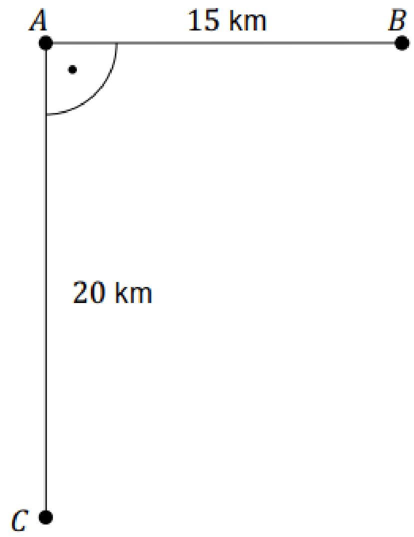
$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$ jest długością jednej z krawędzi bryły.

**Oblicz objętość tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego objętość jest najmniejsza. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 19. (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości $A$, $B$ i $C$ oraz zaznaczono odległości między nimi.
O godzinie 9:00 z miejscowości $A$ do $C$ wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością $4$ km/h. O tej samej godzinie z miejscowości $B$ do $A$ wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością $2$ km/h.




**Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 20. (0–4)

Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością $Q$ produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną $P$ produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0{,}1Q \quad \text{dla } Q \in [0, 900]$$

gdzie $P$ jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a $Q$ – ilością produktu w tys. sztuk.

Koszty $K$ wytworzenia produktu D zależą od ilości $Q$ wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0{,}002Q^3 + Q^2 + 29{,}9985Q + 50$$

gdzie $K$ jest kosztem produkcji w tys. zł.

**Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 21. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt $O$ jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną $AC$ podstawy i środek $S$ krawędzi bocznej $BE$ poprowadzono płaszczyznę.

**Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta $BSO$ (w zaokrągleniu do $1^\circ$). Zapisz obliczenia.**

Wskazówka.
Skorzystaj z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych (*Wybrane wzory matematyczne*, strona 34).

## Zadanie 22. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ oraz $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie $P$ o współrzędnych $(x_P, y_P)$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których współrzędne punktu $P$ spełniają warunki:**

$$x_P > 0,\ y_P > 0,\ y_P \geq x_P^2 \quad \text{oraz} \quad 2 < -\frac{8}{(y_P)^2} + \frac{8}{x_P}.$$

**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 23. (0–3)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie $S = (19, -11)$ i promieniu $17\sqrt{2}$. Wierzchołek $A$ trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek $AB$ jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna $AC$ trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

**Oblicz sinus kąta $ABC$. Zapisz obliczenia.**

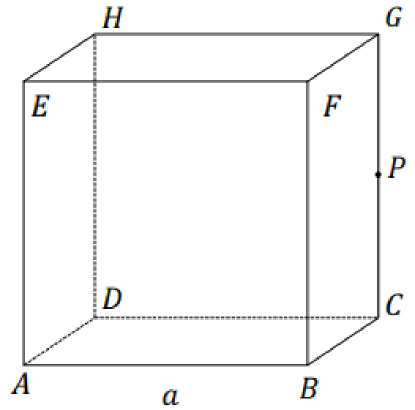
## Zadanie 24. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$.

**Oblicz pole tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 25. (0–3)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości $a$. Punkt $P$ jest środkiem krawędzi $CG$ tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



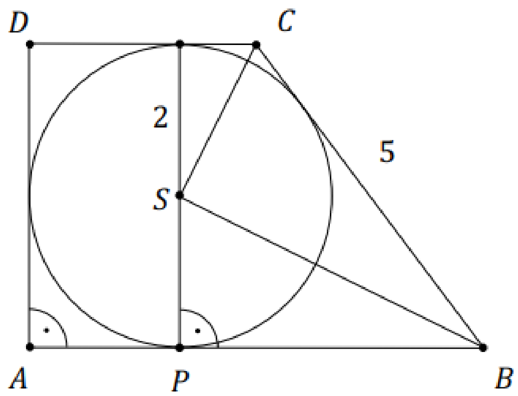

$|PG| = |PC|$

**Oblicz odległość wierzchołka $C$ od płaszczyzny zawierającej punkty $B, D$ oraz $P$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 26. (0–5)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach $A$ i $D$. Ramię $BC$ trapezu ma długość $5$. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie $S$ i promieniu $2$. Punkt $P$ jest punktem styczności tego okręgu i dłuższej podstawy $AB$ tego trapezu (zobacz rysunek).

**Wykaż, że trójkąty $BPS$ i $BSC$ są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa. Zapisz obliczenia.**



## Zadanie 27. (0–4)

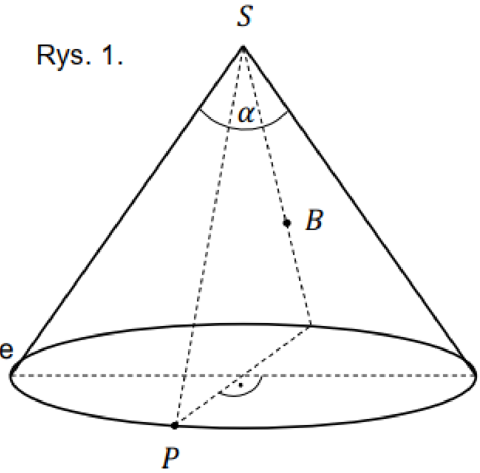
Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt $S$ pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie $P$ położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości $H_0$ metrów n.p.m. Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy $B$ znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości $H_1$ metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości $H_2$ metrów n.p.m. (zobacz rysunek 1.).

**Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy. Zapisz obliczenia.**

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia $\alpha$.

*Wskazówka*: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu $P$ do $B$ na wycinku koła.

Rys. 1.




## Zadanie 28. (0–4)

Niech $n$ będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru $\mathbb{M} = \{1; 2; 3; \dots; 3n+1\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie $A$ odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru $\mathbb{M}$ trzech liczb, których suma przy dzieleniu przez $3$ daje resztę $1$.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 29. (0–4)

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że $40\%$ rozegranych z synem partii wygrywa.

**Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od $0,95$. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 30. (0–3)

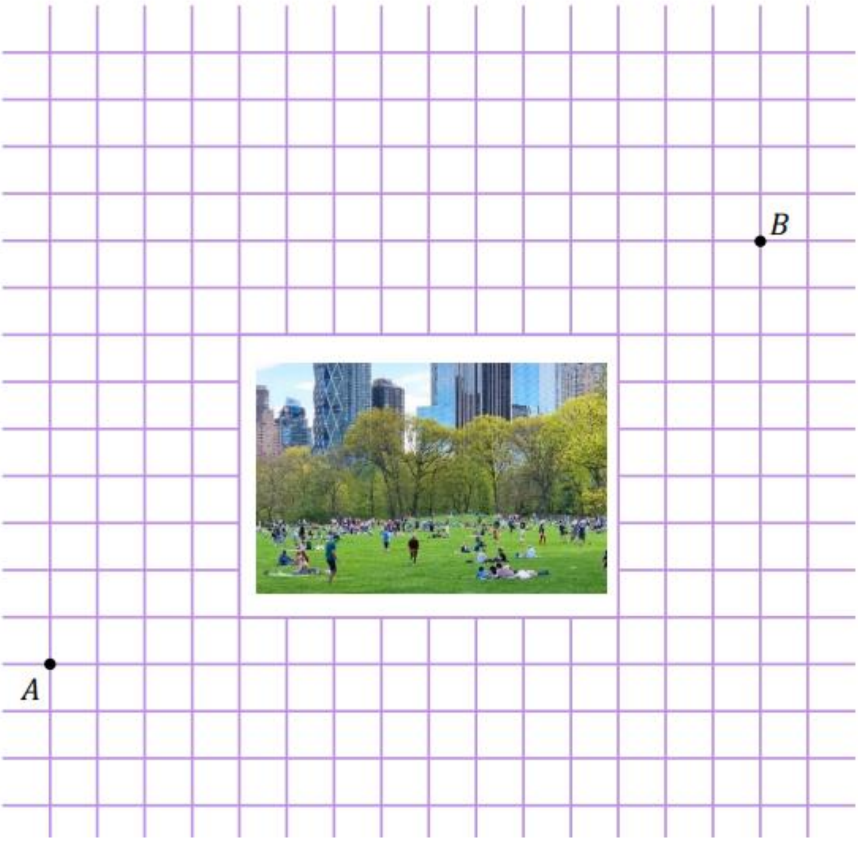
Pewna choroba dotyka $0{,}2\%$ całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę), jest równe $0{,}99$. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe $0{,}98$.
Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

**Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pan X jest rzeczywiście chory. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 31. (0–4)

W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic, a ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, gdzie obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono poniżej na rysunku. Tomek znajduje się w punkcie $A$ miasta i chce dojechać samochodem najkrótszą drogą do punktu $B$.

**Oblicz, ile jest najkrótszych dróg z $A$ do $B$. Zapisz obliczenia.**



# Odpowiedzi

$m \in (0,2) \cup (2,4)$.

$4\sqrt[3]{36}$

$4-\sqrt{13}$, $4+\sqrt{13}$ oraz 8.

$(11,-4)$, $(12,-5)$,

$(14,-1)$, $(15,-2)$.

$m = 2$.

$p = \frac{1}{4}$ lub $p = \frac{1}{2}$.

-

: 7.

962,5 metrów. 270,75 m/h.

$600\sqrt{2}$ km

-

$$\frac{1}{54}$$

$$a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

-

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

-

$p = 3$.

256.

10:30.

25 500 sztuk.

$\alpha \approx 20°$.

$m \in \left(1-\sqrt{3}, 1\right]$.

$$\frac{8}{17}$$

: 63

$$\frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{(H_2-H_0)^2+(H_2-H_1)^2-2(H_2-H_0)(H_2-H_1)\cos\left(\pi\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$: \frac{3n^2-1}{(3n+1)(3n-1)}$$

$n \geq 6$

$$\frac{99}{1097} \approx 0{,}09$$

30140.