



delt

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3.141592\dots$

NR 8 (615) 2025

CENA 9 ZŁ VAT 8%

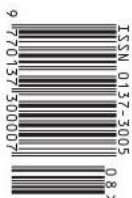
PL ISSN 0137-3005 INR/IND 35 550 X

MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Obserwatorium
im. Very C. Rubin
str. 23

Źródło: NSF-DOE Vera C. Rubin Observatory

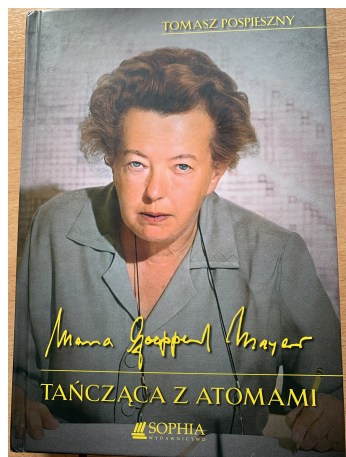


Nakład: 2700 egz.

Noblistka na pół etatu

Andrzej HENNEL

„Maria Goeppert-Mayer. Tańcząca z atomami” – pod tym tytułem ukazała się właśnie znakomita książka profesora Tomasza Pośpiesznego z Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu, wydana przez Wydawnictwo Sophia, poświęcona katowickiej Noblistce.



Mural „Tańcząca z atomami” na Rektoracie Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, Bärbel Miemietz via Wikimedia Commons, licencja CC BY-SA 4.0

Urodzona w Katowicach Maria Goeppert-Mayer (1906–1972) otrzymała w 1963 roku drugą Nagrodę Nobla z fizyki przyznaną kobiecie. Pierwszą otrzymała Maria Skłodowska-Curie. Są to jedyne kobiety, które zdobyły tę nagrodę w XX wieku. Wielkim paradoksem jest fakt, że przez ponad ćwierć wieku pracy na uczelniach w USA Maria Goeppert-Mayer była zatrudniona na części lub na pełnym etacie, ale bez wynagrodzenia. Powodem tego była praca jej męża – profesora chemii na tych samych uczelniach.

Nasza bohaterka urodziła się w Katowicach w 1906 roku przy ulicy Młyńskiej 5 jako jedyne dziecko Marii (z domu Wolff) – nauczycielki i Friedricha Göpperta (1870–1927) – doktora medycyny. Opuściła Katowice na zawsze w 1909 roku, gdy ojciec otrzymał stanowisko profesora pediatrii w Getyndze. Miasto Katowice nie zapomina jednak o swojej Noblistce i na ścianie Rektoratu Uniwersytetu Śląskiego znajduje się (od 2014 r.) mural jej poświęcony, zatytułowany „Tańcząca z atomami”, a jeden z biurowców w centrum nosi nazwę Goeppert-Mayer.

Tradycje akademickie w rodzinie Göppertów sięgają wielu pokoleń. Maria była siódmą osobą w rodzinie, która objęła katedrę uniwersytecką. Jej pradziad Johann Göppert (1800–1884) był profesorem medycyny i rektorem Uniwersytetu Wrocławskiego. Jej dziadek Heinrich Göppert (1838–1882) był profesorem prawa w Berlinie. Nic więc dziwnego, że Maria chciała studiować na uniwersytecie w Getyndze, który był w latach 20. XX wieku mekką dla naukowców reprezentujących nauki ścisłe.

Tomasz Pośpieszny w książce „Maria Goeppert-Mayer. Tańcząca z atomami” starannie opisuje problemy edukacji kobiet na początku XX wieku. W 1921 roku Maria rozpoczęła naukę w trzyletniej, żeńskiej, prywatnej szkole średniej Luisenschule, prowadzonej przez sufrażystki. Niestety szkoła zbankrutowała. Siedemnastoletnia Maria wraz z czterema koleżankami postanowiły same przygotować się do eksternistycznego egzaminu maturalnego. Do egzaminu przystąpiły razem z ponad trzydziestoma starszymi chłopcami, których losy potargała I wojna światowa. Ostatecznie zdała cała piątka dziewcząt i jeden chłopiec.

Na studiach pierwszym mistrzem Marii był przez 3 lata wybitny matematyk David Hilbert (1862–1943). Znakomite przygotowanie matematyczne doskonale jej się później przydało w fizyce teoretycznej. Był to okres gwałtownego rozwoju mechaniki kwantowej. Maria zafascynowała się fizyką i została z nią do końca życia. Jej kolejnym mistrzem i jednocześnie wielkim przyjacielem był znakomity fizyk Max Born (1882–1970), późniejszy laureat Nagrody Nobla z fizyki w 1954 roku.

W 1927 roku zmarł ojciec Marii. Sytuacja finansowa rodziny pogorszyła się. Matka zaczęła wynajmować pokoje zagranicznym gościom – co miało poważne konsekwencje. Maria była piękną i bardzo inteligentną kobietą, więc nic dziwnego, że miała liczne grono wielbicieli. Noblista Robert Mulliken (1896–1986), który mieszkał u Göppertów, żałował potem, że nie poprosił o rękę Marii, zwłaszcza że była ona lepszym od niego matematykiem, i razem mogliby wiele osiągnąć. Kolejny Amerykanin, chemik Joe Mayer (1904–1983), wynajmujący pokój u Göppertów nie był tak nieśmiały. Jego wielkim atutem, poza miłością do Marii, był fakt, że stanowczo chciał, aby nadal pracowała naukowo. Nie było to popularne podejście nawet pośród wybitnych fizyków. Noblista Isidor Rabi, urodzony w Rymanowie (1898–1988), twierdził na przykład, że „System nerwowy kobiet jest po prostu inny”.

W styczniu 1930 roku Maria i Joe wzięli ślub, a w marcu Maria obroniła swój doskonały doktorat z fizyki teoretycznej poświęcony emisji dwufotonowej. Dopiero kilkadziesiąt lat później, po zbudowaniu pierwszych laserów, możliwa była pozytywna weryfikacja wyników jej pracy. W tym samym miesiącu młoda para wypłynęła transatlantykiem MS Europa do Stanów Zjednoczonych.

Rozpoczął się amerykański rozdział w życiu Marii, istotnie utrudniony ograniczeniami praw kobiet. Jak pisze profesor Pośpieszny:

Prawo do edukacji wyższej kobiet w Stanach Zjednoczonych datuje się na 1837 rok, gdy Oberlin College zaczął przyjmować pierwsze studentki. Do ich zadań należało pranie, cerowanie, szycie, sprzątanie oraz podawanie posiłków studiującym mężczyznom (sic!). Zabraniano im studiować łacinę, grekę czy matematykę. . . Pierwszą kobietą z dyplomem lekarskim była amerykańsko-brytyjska lekarka Elisabeth Blackwell (1849 rok). Złożyła podania do 20 szkół medycznych – wszystkie odmówiły przyjęcia kobiety. Powszechny był pogląd, że studiowanie anatomii mogłoby zdegenerować jej moralność. Ostatecznie jedna z nowojorskich uczelni zgodziła się ją przyjąć, pod warunkiem, że zgodzą się na to pozostali studenci – mężczyźni. Studenci wyrazili zgodę w przekonaniu, że to żart. Elisabeth skończyła studia z najwyższą lokatą.

Były to problemy XIX wieku, ale wiek XX nie okazał się dla Marii łaskawszy. W 1930 roku Joe Mayer został profesorem Uniwersytetu Johna Hopkinsa w Baltimore. Ze względu na zakaz nepotyzmu Maria pracowała tam jako wolontariuszka. Wykładała, pracowała naukowo, prowadziła doktoranta i pisała publikacje. Otrzymywała wynagrodzenie 200 dolarów rocznie. Jej ówczesny szef, Karl Herzfeld (1892–1978), w piśmie do władz uczelni oszacował, że za swoją pracę powinna otrzymywać minimum tysiąc dolarów rocznie. Pozostało to bez jakiegokolwiek efektu. Natomiast gdy z różnych powodów Herzfeld zwolnił się z pracy, zaproponowano Marii (3 dni przed rozpoczęciem zajęć) objęcie jego wykładu z mechaniki klasycznej – oczywiście za darmo! W 1933 roku została obywatelką USA i urodziła córkę

Marię Annę. Później, w 1938 roku urodziła syna Petera. W 1939 roku Mayerowie przenieśli się na Uniwersytet Columbia w Nowym Jorku.

Na Columbii przyjęto ją jeszcze gorzej, ostatecznie objęła bezpłatne stanowisko wykładowcy. W 1941 roku rozpoczęła płatną pracę na pół etatu jako wykładowca w prywatnej uczelni w Sarah Lawrence College.

Po ataku Japonii w Pearl Harbour, w grudniu 1941 roku USA przystąpiły do wojny. Chociaż Maria była Niemką, przerażało ją zagrożenie bombą atomową w rękach Hitlera. W USA ruszył właśnie „Projekt Manhattan”. W 1943 roku wybitny chemik Harold Urey (1893–1981) poprosił Sarah Lawrence College o urlop dla Marii „w celu zajęcia się ważnym projektem wojskowym”. Aż do 1945 roku Maria pracowała nad problemem separacji izotopów uranu do bomby atomowej w laboratorium Substitute Alloy Materials Uniwersytetu Columbia. Początkowo bez wiedzy męża. Po ataku na Hiroszimę i Nagasaki była nawet zadowolona, że ich kierunek badań okazał się nietrafiony. Później współpracowała z „ojcem bomby wodorowej”, Edwardem Tellerem (1908–2003), nad zagadnieniami z nią związanymi.

W 1946 roku Mayerowie przeprowadzili się do Chicago. Joe został profesorem na Wydziale Chemii w Instytucie Badań Jądrowych na Uniwersytecie w Chicago. Pomimo pracy dla Projektu Manhattan Marii po raz kolejny odmówiono płatnego stanowiska, i znów pracowała za darmo jako profesor.

W lipcu 1946 zaproponowano jej płatne pół etatu fizyka w nowo powstałym Argonne National Laboratory w Chicago. Była to placówka rządowa, która powstała w związku z Programem Manhattan.

W Argonne, zachęcona przez Edwarda Tellera, opracowała powłokowy model jądra atomowego. Zauważyła, że szczególnie trwale są jądra posiadające liczby protonów lub neutronów 2, 8, 20, 28, 50, 82 i 126. Nazywano je magicznymi. Zaproponowała strukturę zamykających się powłok w jądrze atomowym podobnych do warstw cebuli. W związku z tym nazywano ją „Cebulową Madonną”. Prace te zostały opublikowane w latach 1948–1949.

Okazało się, że w tym samym czasie do analogicznych wniosków doszedł niezależnie fizyk niemiecki Hans Jensen (1907–1973). Poznali się i polubili, okazało się, że mieli ten sam dzień i miesiąc urodzenia. Wspólnie napisali monografię na temat budowy jądra atomowego. Od 1955 roku Maria była wielokrotnie nominowana do Nagrody Nobla, wciąż nie mając płatnego pełnego etatu na uczelni.

W 1959 roku otrzymała propozycję profesury w Uniwersytecie Kalifornijskim w San Diego. Uniwersytet w Chicago wpadł wtedy na pomysł, że może jej płacić pensję, ale było już za późno. Mayerowie w 1960 roku przenieśli się do Kalifornii. W ten sposób 30 lat po przyjeździe do USA Maria objęła płatne stanowisko profesorskie na uczelni. Niestety w październiku 1960 roku doznała udaru, po którym była częściowo sparaliżowana.

W roku 1963 Komitet Noblowski postanowił przyznać nagrodę z fizyki trójce fizyków zajmujących się teorią jądra atomowego. Połowę nagrody otrzymał wybitny fizyk Eugene Paul Wigner (1902–1995) – „za wkład do teorii jądra i cząstek elementarnych, zwłaszcza odkrycie i zastosowanie elementarnych zasad symetrii”. Po ćwiartce nagrody otrzymali Maria Goeppert-Mayer i J. Hans D. Jensen – „za odkrycia dotyczące powłokowej budowy jąder”.



Maria Goeppert-Mayer z królem szwedzkim Gustawem Adolfem VI podczas ceremonii noblowskiej w Sztokholmie (Wikipedia)



W 2011 roku poczta amerykańska wyemitowała znaczek z podobizną Marii Goeppert-Mayer

Maria była pierwszą Amerykanką i drugą kobietą w historii, która otrzymała nagrodę z fizyki. W latach 1955–1963 zebrała w sumie 27 nominacji: 26 z fizyki i jedną z chemii. Wśród nominujących ją osób znajdowali się między innymi wybitni fizycy – Max Born, Harold Urey, James Franck, Eugene Wigner, Willis Lamb.

Paradoksalną sprawą są aktualne strony internetowe trzech uczelni, które dawniej nie doceniały Marii – Uniwersytetu Johna Hopkinsa, Uniwersytetu Columbia i Uniwersytetu w Chicago. Wszystkie te uczelnie na liście „swoich” noblistów z dumą umieściły Marię Goeppert-Mayer. Myślę, że gdyby żyła i mogła zabrać głos w tej sprawie, to przynajmniej chciałaby wycofać swoje nazwisko z Uniwersytetu Columbia. Kiedyś odmówiła wpisania afiliacji tej uczelni przy publikacji.

W 1967 roku Maria Goeppert-Mayer była w Warszawie na uroczystościach z okazji 100 urodzin Marii Skłodowskiej-Curie. Zapytana przez prof. Henryka Jabłońskiego, czy ma szczególne życzenia, powiedziała: „chcę odwiedzić Katowice”. Niestety tego nie udało się zrealizować.

Maria pracowała w San Diego do 1972 roku, gdzie zmarła na zator płuc. Los „póletatowej noblistki”, która przez wiele lat była niedoceniana tylko dlatego, że była kobietą, odcisnął piętno na amerykańskiej fizyce. Od 1986 roku Amerykańskie Towarzystwo Fizyczne przyznaje specjalną nagrodę imienia Marii Goeppert-Mayer przeznaczoną dla kobiet-fizyków.

Książka profesora Pośpiesznego doskonale przybliżyła postać wybitnej katowiczanki polskiemu czytelnikowi. Dzięki dostępowi do domowego archiwum fotografii mieszkającej w Kalifornii wnuczki Marii wiele ciekawych fotografii rodzinnych zostało opublikowanych po raz pierwszy. Gorąco polecam książkę „Maria Goeppert-Mayer. Tańcząca z atomami”.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1825. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCA = \sphericalangle ECD = \sphericalangle DEC = \sphericalangle AEC.$$

Udowodnić, że CE połowi BD .

M 1826. Na każdej z $2n$ kart napisano pewną liczbę z przedziału $[1, 2]$ (na różnych kartach napisano być może różne liczby). Udowodnić, że można te karty podzielić na dwa stosy tak, aby sumy liczb napisanych na kartach stosów s_1, s_2 spełniały nierówności

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{s_1}{s_2} \leq 1.$$

M 1827. Dane są takie liczby pierwsze p, q , że $p < q < 2p$. Udowodnić, że istnieją takie dwie kolejne liczby całkowite dodatnie, że największy dzielnik pierwszy jednej z nich jest równy p , a drugiej q .

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1125. W chwili t_0 w całej objętości jednorodnego, kulistego ciała niebieskiego o promieniu R następuje wybuch. W wyniku wybuchu cała masa zaczyna ekspandować. Początkowa prędkość v ekspansji każdego elementu masy jest proporcjonalna do jego odległości r od środka ciała: $v = Hr$. $H > 0$ jest pewną stałą. Jaki warunek musi spełniać początkowa gęstość ρ ciała, żeby opisany wybuch zakończył się ponownym skupieniem całej masy? Stała grawitacji wynosi G .

F 1126. W upalny dzień temperatura w mieszkaniu wynosi $t_p = 30^\circ\text{C}$. Kompresor lodówki ma moc $P = 40\text{ W}$. Jaki jest minimalny czas τ potrzebny do zamrożenia (tzn. zamienienia w lód) $m = 1\text{ kg}$ wody o początkowej temperaturze $t_w = 0^\circ\text{C}$? Ciepło topnienia lodu $L = 334\text{ J/g}$.

Rozwiązania na str. 24

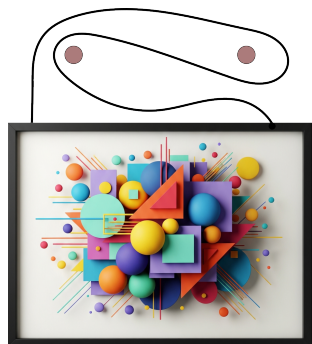
O najgorszej metodzie wieszania obrazków

*Wydział Matematyki Stosowanej,
Akademia Górniczo-Hutnicza
w Krakowie

Maria PIECZARKA*

W niniejszym artykule zajmiemy się pewną łamigłówką – należy zawiesić obrazek na n gwoździach w taki sposób, aby po wyjęciu choć jednego gwoździa obrazek spadł.

Nawet dla $n = 2$ zadanie nie jest trywialne. Na rysunku 1 zilustrowany jest sposób zawieszenia, który *nie jest* rozwiązaniem: o ile wyjęcie prawego gwoździa faktycznie skutkuje upadkiem obrazka, to po wyjęciu lewego ramka wciąż będzie wisiała na ścianie. Zachęcamy Czytelnika, by przed przystąpieniem do dalszej lektury spróbował sam rozwikłać ten przypadek (a może również $n = 3$?). By nie psuć zabawy, ilustrację jednego z możliwych rozwiązań zamieściliśmy dopiero na następnej stronie.



Rys. 1

Przedstawimy teraz notację pozwalającą łatwo opisywać różne sposoby wieszania obrazków. Wyobraźmy sobie, że prowadzimy linkę między gwoździami od lewego punktu zaczepienia do prawego. Aby oznaczyć przeprowadzenie nitki w prawo nad i -tym gwoździem, będziemy wykorzystywać symbol x_i . Jak się zaraz okaże, przeprowadzenie nitki w lewo (nad i -tym gwoździem) rozsądnie jest oznaczyć przez x_i^{-1} . Nie będziemy odnotowywać przeprowadzania nitki pod gwoździami. Dla przykładu, przedstawiony na rysunku 1 sposób zawieszenia odpowiada napisowi $x_1 x_2 x_1^{-1}$.

Zauważmy od razu, że przeprowadzenie nitki najpierw w jednym, a bezpośrednio po tym w drugim kierunku nad jakimś gwoździem niczego nie zmienia w sposobie zawieszenia – po naciągnięciu nitki ta operacja przestaje być widoczna. Odpowiada to swoistemu „prawu skracania”: z uzyskanego napisu możemy usunąć wszelkie wystąpienia $x_i x_i^{-1}$, jak i $x_i^{-1} x_i$. Przy jakich napisach możemy zaś spodziewać się upadku obrazka? Takich, dla których po opisanej operacji skracania nic nie zostaje – pusty napis odpowiada sytuacji, w której nitka znajduje się cały czas pod gwoździami, więc obrazek niechybnie wylądnie na podłodze. Pozostaje rozstrzygnąć, czemu odpowiada operacja usuwania i -tego gwoździa. Nie jest to trudne, wystarczy pozbyć się z napisu wszystkich wystąpień symbolu x_i (i jego odwrotności).

Powróćmy do przykładu z rysunku 1. Czemu odpowiada usunięcie drugiego gwoździa? Należy z napisu $x_1 x_2 x_1^{-1}$ usunąć x_2 , otrzymując napis $x_1 x_1^{-1}$, który po skróceniu staje się pusty – obrazek upada. Kiedy usuniemy drugi gwoździe, musimy z napisu usunąć wszystkie wystąpienia x_1 , zostając z samym x_2 . Jest to niepusty napis, więc obrazek wciąż będzie wisiał.

Analiza ta pozwala nam już dość łatwo rozwiązać wyjściowe zadanie dla przypadku dwóch gwoździ. Wystarczy bowiem na końcu naszego napisu dopisać x_2^{-1} (tzn. rozważyć zawieszenie opisane przez $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$). Wtedy usunięcie symboli x_2 znów pozostawi nas z $x_1 x_1^{-1} = \emptyset$, zaś usunięcie x_1 da nam $x_2 x_2^{-1} = \emptyset$, czyli obrazek upadnie również w tej sytuacji. Właśnie taki sposób zawieszenia został zilustrowany na następnej stronie. Ale jak można rozszerzyć to podejście na większą liczbę gwoździ?

W algebrze wyrażenie postaci $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ nazywa się *komutatorem* i oznacza się je przez $[x_1, x_2]$.

Operacji tej można poddać nie tylko symbole, lecz również większe napisy. W tym celu musimy jednak zdefiniować odwrotność napisu S , czyli napis S^{-1} , który po doklejeniu do S i skróceniu da napis pusty. Nie jest to trudne – wystarczy ułożyć symbole wchodzące w skład S w przeciwnej kolejności, za każdym razem dopisując „odwrotność” tam, gdzie jej brakło, i zabierając tam, gdzie była. Dla przykładu, odwrotnością napisu $S = x_1^{-1} x_2 x_3$ jest $S^{-1} = x_3^{-1} x_2^{-1} x_1$, gdyż:

$$x_1^{-1} x_2 x_3 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1 = x_1^{-1} x_2 x_2^{-1} x_1 = x_1^{-1} x_1 = \emptyset.$$

Komutatorem napisów S i Q nazwiemy $[S, Q] = S Q S^{-1} Q^{-1}$ (umieszczanie napisów obok siebie odpowiada oczywiście tworzeniu z nich większego napisu).

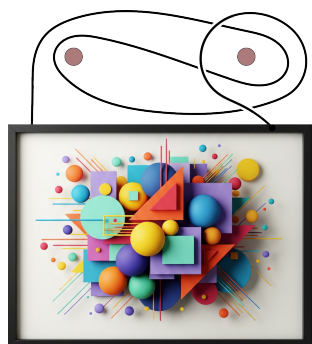
Rozważmy teraz zdefiniowany rekurencyjnie ciąg napisów:

$$\begin{aligned} S_2 &= [x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, \\ S_3 &= [S_2, x_3] = S_2 x_3 S_2^{-1} x_3^{-1} \\ &= (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}) x_3 (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})^{-1} x_3^{-1} \\ &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1}, \\ &\vdots \\ S_n &= [S_{n-1}, x_n] = S_{n-1} x_n S_{n-1}^{-1} x_n^{-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że napis S_n odpowiada szukanemu sposobowi zawieszenia obrazka na n gwoździach! Istotnie, jeśli z $S_n = S_{n-1} x_n S_{n-1}^{-1} x_n^{-1}$ usuniemy x_n , zostaniemy z $S_{n-1} S_{n-1}^{-1} = \emptyset$. Jeśli zaś usuniemy z niego dowolne x_i , gdzie $i < n$, to usuniemy je z S_{n-1} . Możemy jednak indukcyjnie założyć, że napis S_{n-1} w związku z tym skraca się do napisu pustego, co zostawia nas z $x_n x_n^{-1} = \emptyset$.

Już dla $n = 4$ długość rozwiązania jest horrendalna:

$$S_4 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_3^{-1}.$$



Rys. 2. Ilustracja rozwiązania dla $n = 2$

Rozwiązanie to ma jednak jedną zasadniczą wadę – długość rozwiązań rośnie wykładniczo. Jeśli przez d_n oznaczmy długość napisu S_n , to spełniona jest rekurencja $d_n = 2d_{n-1} + 2$, co przy warunku $d_2 = 4$ daje nietrudny do sprawdzenia jawny wzór $d_n = 2^n + 2^{n-1} - 2$.

Sprytny podział gwoździ to połowa... sukcesu. Okazuje się, że możemy dokonać bardzo zgrabnej optymalizacji, osiągając złożoność wielomianową!

Wystarczy, że podejmiemy do sprawy choć odrobinę delikatniej, nie dokładając raz za razem po jednym gwoździu, a dzieląc zbiór gwoździ na coraz mniejsze połowy, które będą komutować ze sobą.

Zdefiniujmy w tym celu:

$$E(i : i) = x_i,$$

$$E(i : i + 1) = [x_i, x_{i+1}]$$

i w ogólności:

$$E(i : j) = \left[E\left(i : \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor\right), E\left(\left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor + 1 : j\right) \right].$$

Dla przykładu:

$$\begin{aligned} E(1 : 4) &= [E(1 : 2), E(3 : 4)] \\ &= E(1 : 2)E(3 : 4)E(1 : 2)^{-1}E(3 : 4)^{-1} \\ &= (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})(x_3 x_4 x_3^{-1} x_4^{-1})(x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1})(x_4 x_3 x_4^{-1} x_3^{-1}). \end{aligned}$$

Tak zdefiniowane $E(i : j)$ będzie rozwiązaniem dla gwoździ od i do j , pozwalając rozbić problem na mniejsze części. Aby się o tym przekonać, wystarczy przeprowadzić indukcję względem wartości różnicy $j - i$. Usunięcie x_s dla $i \leq s \leq k$, gdzie $k = \lceil \frac{i+j}{2} \rceil$, „anihiluje” nam $E(i : k)$ na mocy założenia indukcyjnego i zostaje $E(k + 1 : j)E(k + 1 : j)^{-1} = \emptyset$. Rozumowanie jest analogiczne, gdy $k + 1 \leq s \leq j$.

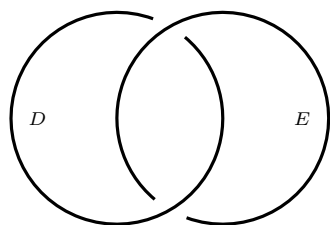
Przyjrzyjmy się długości tak określonego rozwiązania. Dla uproszczenia przyjmijmy, że n jest potęgą dwójki. Jeśli δ_m jest długością $E(1 : n)$, gdzie $n = 2^m$, to spełniona jest zależność $\delta_m = 4\delta_{m-1}$, co przy $\delta_0 = 1$ daje nam po prostu $\delta_m = 4^m = n^2$. Dla wartości n niebędących potęgami dwójki pozostaje prawdą, że długość napisu jest rzędu n^2 .

Zagadka o wieszaniu obrazków jest świetnym przykładem na to, jak dobrze dobrany zapis matematyczny pozwala uprościć pozornie złożony problem kombinatoryczny do bardziej podstawowych, a przede wszystkim – czytelnych! zagadnień. Nada się ona również na efektowny pokaz matematyczny, jeżeli tylko zamiast na gwoździach, przeprowadzimy doświadczenie na wyciągniętych ramionach ochotników!

Tekst powstał na podstawie artykułu *Picture-Hanging Puzzles*, Erika Demaine’a, Martina Demaine’a, Yaira Minskiego, Josepha Mitchella, Ronalda Rivesta i Mihaia Patrascu.

Pierścienie Boromeuszy a wieszanie obrazków

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



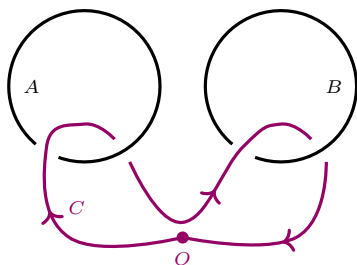
Rys. 1. Przykład nietrywialnego splotu pętli D i E (splot Hopfa)

*Michał MIŚKIEWICZ**

Polecam następującą zagadkę: skonstruować trzy pętle („pierścienie”) A , B , C w taki sposób, by:

- tworzyły one nietrywialny splot, a więc np. by pętli C nie dało się wyjąć na zewnątrz;
- każda para tworzyła trywialny splot, czyli np. po usunięciu C pozostałe pętle A , B dało się rozdzielić.

Dla ilustracji podaję obok przykład nietrywialnego splotu dwóch pętli (rys. 1). Nietrywialność można rozpoznać po tym, że idąc wzdłuż D , raz przechodzimy nad E , a raz pod. Rozwiązanie tej zagadki (jak i następnych) można znaleźć



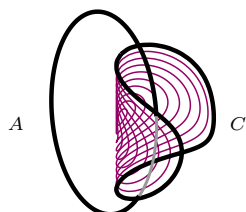
Rys. 2. Trywialny spłot A i B jako początek rozwiązania zagadki. Kolorem zaznaczona jest pętla C odpowiadająca przykładowemu napisowi ab

na stronie 18, tymczasem wskazówka: zacząć od umieszczenia pętli A i B jak na rysunku 2 (mogą nawet na siebie nachodzić, byle nie były splątane), po czym poprowadzić pętlę C w taki sposób, by kolejne „przecięcia” z pętlą A się znosiły, czyli np. układały w ciąg nad-nad-pod-pod lub nad-pod-pod-nad; podobnie z pętlą B – w ten sposób unikniemy splotu par A, C i B, C . Pozostaje przeprowadzić to w taki sposób, by cała trójka była splątana.

Najprostsze rozwiązanie tej zagadki bierze swoją nazwę od włoskiego rodu Boromeuszy, który umieścił je w swoim herbie. Według niektórych źródeł spłot ten symbolizował więzy łączące trzy rodziny arystokratyczne – Boromeuszy, Sforzów i Viscontich – a według innych odnosił się do Trójcy Świętej. Był też chętnie stosowany wcześniej przez ludy germańskie (w swojej trójkątnej formie znanej jako *valknut*), jak i poza Europą. Jaki jednak ma to związek z wieszaniem obrazków rozważanym przez Marię Pieczarkę w obecnym numerze?

Otóż jest to po prostu ta sama zagadka! W zobaczeniu tego pomoże opis formalny, nieco odmienny od języka przejść *nad* i *pod*. Ustalmy jakiś punkt zaczepienia O i prowadźmy pętlę C etapami: w jednym kroku wychodzimy z O , przechodzimy przez jedną z pętli A lub B i wracamy do O . Zanotujmy przy tym kolejne kroki: niech a odpowiada przejściu przez A z góry na dół, a^{-1} podobnie, tylko z dołu do góry, a b oraz b^{-1} analogicznie dla B . Przeanalizujemy następnie otrzymany napis. Dla przykładu: ab odpowiada zwyczajnemu łańcuchowi złożonemu z trzech ogniw (rys. 2), który spełnia prawie wszystkie warunki zagadki – niestety usunięcie A pozostawia B i C nadal splątane. Odnotujmy, że przyporządkowanie napisowi odpowiadającej mu pętli jest wzajemnie jednoznaczne, jeśli umówimy się, że napisy można „skracać”, np. utożsamiając $aaa^{-1}b$ z ab (polecam zastanowić się, dlaczego to są dwa sposoby opisu tej samej pętli), przy czym zamiana kolejności symboli jest niedozwolona. Ta obserwacja nie jest łatwa w dowodzie, ale chyba odpowiada intuicji.

Po przeczytaniu artykułu o wieszaniu obrazka nie powinno dziwić, że właściwym rozwiązaniem okazuje się... pętla C opisana poprzez $aba^{-1}b^{-1}$. Rzeczywiście, usunięcie pętli B powoduje, że symbole b i b^{-1} można pominąć, pozostawiając aa^{-1} , a to skraca się do pustego napisu, czyli pętli trywialnej (niepołączonej z A); podobnie jest przy usunięciu A . Warto pamiętać, że nie jest to jedyne rozwiązanie. W artykule Jacka Gładysza z Δ_{18}^1 pojawia się inny naturalny spłot, spopularyzowany przez Martina Gardnera, i okazuje się, że istotnie różni się on od splotu Boromeuszy. Jakiemu napisowi odpowiada? Pozostawiam Czytelnika z tym pytaniem.



Rys. 3. Na pętli C rozpięto „dysk” rozłączny z A . Umożliwia to stopniową deformację pętli C poprzez ściąganie jej do punktu, co zaznaczono kolorowymi liniami

Proponuję jeszcze trzy zagadki związane ze splotem Boromeuszy. W ramach wstępu do pierwszej z nich zauważmy, że na pętli C nie da się rozpiąć dysku, który byłby rozłączny z A i B – inaczej C dałoby się ściągnąć do punktu bez zahaczenia o pozostałe pętle (rys. 3). Ale da się rozpiąć co innego:

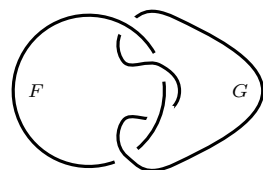
Zagadka 2. W splocie Boromeuszy znaleźć powierzchnię rozpiętą na pętli C , czyli mającą C jako swój brzeg, a jednocześnie rozłączną z pętlami A i B .

Warto zwrócić uwagę, że na rysunku 1 podobne zadanie byłoby niemożliwe – na pętli D nie da się rozpiąć *żadnej* powierzchni rozłącznej z E . Okazuje się tu kluczowe, że napis $aba^{-1}b^{-1}$ skraca się, jeśli dopuścimy zamianę symboli miejscami (bo $aa^{-1}bb^{-1}$ sprowadza się do pustego napisu). Pełne wyjaśnienie tego fenomenu można odnaleźć w twierdzeniu Hurewicza, na którego omówienie niestety brakuje tu miejsca.

Zagadka 3. Znaleźć powierzchnię rozpiętą na F i rozłączną z G (rys. 4). Czy jest ona dwustronna czy jednostronna? (inaczej: orientowalna czy nie?)

Zagadka 4. Znaleźć powierzchnię rozpiętą na splocie Boromeuszy, czyli taką, której brzeg składa się z trzech okręgów A, B, C .

Podobnie dla każdego innego splotu (lub węzła) da się znaleźć rozpiętą nań powierzchnię orientowalną (nawet więcej niż jedną), nazywaną powierzchnią Seiferta – pożytki z istnienia takiej powierzchni to również temat na inną opowieść.



Rys. 4. Pętla G jest dwukrotnie nawinięta na okrąg F , a mimo to na F da się rozpiąć powierzchnię rozłączną z G

Od egzoplanet do egzoksiężyców i egzokomet

* Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
w Olsztynie

*Marcin HAJDUK**

Pierwszy układ planetarny odkrył... Mikołaj Kopernik. Oczywiście był to nasz Układ Słoneczny, w którym znajduje się łącznie osiem planet. Najbliżej Słońca położone są cztery skaliste: Merkury, Wenus, Ziemia i Mars. Za nimi znajdują się cztery gazowe olbrzymy: Jowisz, Saturn, Uran i Neptun. Całości dopełniają inne ciała, takie jak planety karłowate, asteroidy czy komety. Układ spowity jest w pozostałości gazowo-pyłowego dysku.

Już starożytni zauważyli, że planety poruszają się na nieboskłonie w inny sposób niż gwiazdy. Stosunkowo łatwo można było je zidentyfikować, jednak większym problemem okazało się zrozumienie ich ruchów. Złożone ruchy obiegowe i obrotowe Ziemi oraz obiegowe innych planet tworzą dosyć pogmatwane ścieżki planet na nieboskłonie.

By jeszcze bardziej skomplikować sytuację, planety nie krążą „wokół Słońca”, a wokół środka masy Układu Planetarnego. To samo dotyczy Słońca, które również porusza się wokół tego samego środka masy. Gdyby bardzo dokładnie śledzić ruch środka tarczy Słońca na sferze niebieskiej, okazałoby się, że swoje odbicie w nim ma położenie innych planet, a w największym stopniu Jowisza. Prędkość Słońca względem środka masy układu Słońce–Jowisz to 13 m/s.

Ten sam efekt – drobne, regularne przesunięcia pozycji gwiazdy wywołane obecnością planet – może być obserwowany w innych układach planetarnych i stanowi podstawę jednej z metod odkrywania egzoplanet, tzw. **metody astrometrycznej**. Podobnie jak w przypadku Słońca, położenie innych gwiazd mających swoje planety również oscyluje wokół środka masy układu. Zaobserwowane niewielkie oscylacje pozycji gwiazdy mogą świadczyć o obecności jednej lub kilku planet.

Ta metoda właśnie rozpoczęła nasz przegląd technik wykrywania planet poza Układem Słonecznym.

Druga z nich, tzw. **metoda prędkości radialnych**, opiera się na obserwacji zmian położenia gwiazdy wzdłuż linii obserwator–gwiazda. Jest to możliwe dzięki precyzyjnym obserwacjom widna gwiazdy.

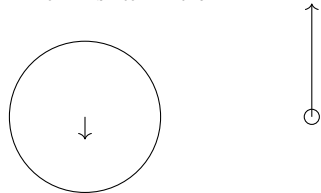
Widmo obserwujemy w praktyce jako zestaw pojedynczych linii. Efekty mechaniki kwantowej powodują, że każdy atom lub molekula (np. wodór gwiazdny) emitują zawsze takie same długości fali λ_0 . Periodyczny ruch gwiazdy wokół środka masy układu powoduje jednak, że wyemitowane światło ulega efektowi Dopplera i obserwowana długość fali linii widmowej λ zależy od składowej prędkości gwiazdy w kierunku do obserwatora V_{rad} , zwanej prędkością radialną. Powoduje to zmiany położenia linii widmowej o $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, co w efekcie daje oszacowanie prędkości $V_{rad}/c = \Delta\lambda/\lambda_0$ (gdzie c to prędkość światła w próżni).

Zmiany prędkości radialnej gwiazdy wywołane ruchem orbitalnym planety powodują więc cykliczne przesuwanie się linii widmowych gwiazdy w stronę fal krótszych i dłuższych, w zależności od tego, czy gwiazda w danym momencie się przybliża, czy oddala od obserwatora.

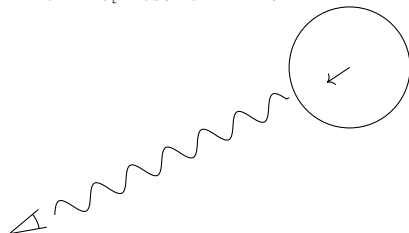
Trzecia z klasycznych technik, nazywana **metodą tranzytów**, ponownie inspirowana efektami w Układzie Słonecznym, w którym obserwujemy tranzyty planet wewnętrznych (Merkurego oraz Wenus) na tle tarczy Słońca. (Podobnie obserwujemy zaćmienia Słońca, które są tranzytami księżyca na tle jego tarczy).

W przypadku egzoplanet sprawa jest bardziej skomplikowana, ponieważ rozdzielczość naszych instrumentów jest niewystarczająca, aby zaobserwować tranzyt bezpośrednio na tle tarczy gwiazdy (egzoplanety znajdują się po prostu za daleko, jak na możliwości obecnej technologii). Można za to zaobserwować spadek jasności gwiazdy spowodowany tranzytem. Spadek ten jest zwykle bardzo niewielki i zależy od stosunku wielkości tarczy gwiazdy i planety.

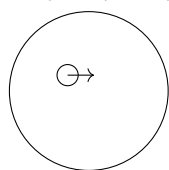
METODA ASTROMETRYCZNA



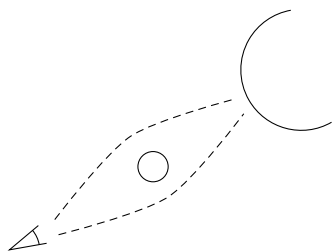
METODA PRĘDKOŚCI RADIALNYCH



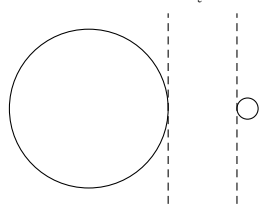
METODA TRANZYTÓW



MIKROSOCZEWKOWANIE GRAWITACYJNE

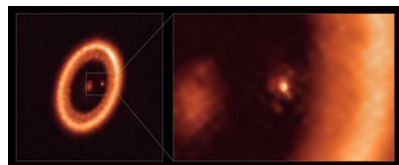


OBRAZOWANIE OPTYKĄ ADAPTATYWNĄ



W przypadku przejścia Jowisza przed tarczą Słońca byłby to spadek jasności o 1% jasności Słońca. Tranzyt trwałby 15 dni i powtarzał się co niecałe dwanaście lat. Z kolei tranzyt Ziemi miałby stokrotnie słabszy efekt i trwałby około tygodnia.

Czwartą techniką jest **mikrosoczewkowanie grawitacyjne**. Ta metoda jest z powodzeniem wykorzystywana przez astronomów z Uniwersytetu Warszawskiego prowadzących projekt OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment). Wykorzystuje ona skupianie światła przez pole grawitacyjne masywnego obiektu (soczewki) przechodzącego przed gwiazdą tła (źródła światła). Co istotne, pojaśnienie wygląda inaczej, gdy soczewką jest pojedynczy obiekt, a inaczej gdy jest nią układ planetarny. Metoda ta jest czuła na planety znajdujące się w dalszej odległości i wystarczająco czuła, aby odkryć planety skaliste. Co ciekawe, pozwala również na odkrywanie planet, które przemierzają Galaktykę samotnie [1].



Dysk wokół gwiazdy PDS 70 (po lewej) oraz zbliżenie na egzoplanetę PDS 70c, wokół której również znajduje się mniejszy dysk (Benisty i in., 2021, *The Astrophysical Journal Letters*, 916, 2)

Najbardziej chyba spektakularną metodą jest jednak **obrazowanie za pomocą adaptatywnej optyki**. Kontrast pomiędzy jasnością gwiazd i planet jest olbrzymi. Można go jednak zniwelować, usuwając obraz gwiazdy lub zasłaniając gwiazdę koronografem, czyli specjalną przesłoną (nazwa pochodzi od zastosowania do obserwacji korony słonecznej). Obrazy wykonane w odpowiednich odstępach czasu pokazują ruch orbitalny planet.

Pierwsze egzoplanety zaczęto odkrywać w latach 90. ubiegłego wieku. Worek z odkryciami utworzyli Aleksander Wolszczan i Dale Frail [2], odkrywając układ planetarny wokół pulsara PSR B1257+12. Było to zaskakujące odkrycie, ponieważ pulsary powstają w wyniku wybuchu supernowej, który powinien doprowadzić do zniszczenia istniejącego wcześniej układu planetarnego. Pochodzenie i przetrwanie planet w tak niegościnnym środowisku stanowi do tej pory nierozwiązaną zagadkę.

W centrum zainteresowania pozostawało jednak odkrycie planet podobnych do Ziemi i krążących wokół gwiazd podobnych do Słońca. W szczególności produkujących energię przez syntezę wodoru w hel. Ten najdłuższy etap ewolucji, trwający do czasu wyczerpania wodoru w jądrze gwiazdy, nazywamy ciągiem głównym.

Pierwszą planetę wokół gwiazdy ciągu głównego 51 Peg odkryli Michel Mayor oraz Didier Queloz [3]. To gazowy olbrzym orbitujący z okresem czterech dni wokół swojej gwiazdy, wywołując zmiany prędkości radialnej o amplitudzie 136 km/s, dużo większej niż Jowisz w przypadku Słońca. Kolejne odkrycia zostały zdominowane przez gazowe olbrzymy w pobliżu macierzystej gwiazdy. Takie egzoplanety powodują największe zmiany prędkości radialnej macierzystej gwiazdy i są najłatwiejsze do wykrycia za pomocą metody prędkości radialnych.

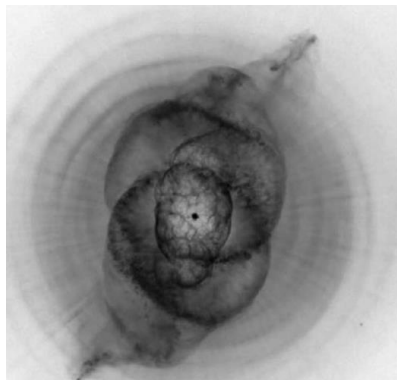
Metody detekcji za pomocą pomiarów prędkości radialnej dominowały do 2010 roku. Wówczas za sprawą sondy Kepler nastąpił skokowy wzrost w odkrywaniu egzoplanet metodą tranzytów. W przyszłości oczekuje się skokowego wzrostu liczby planet odkrywanych metodą mikrosoczewkowania grawitacyjnego.

Każda metoda detekcji egzoplanet jest czuła na określony zakres mas i okresów orbitalnych egzoplanet (rys. 1). Metoda tranzytów sprawdza się najlepiej w przypadku planet wielkości co najmniej Neptuna na stosunkowo ciasnych orbitach (Neptun, choć klasyfikowany jako gazowy olbrzym, jest „tylko” około 4 razy większy i około 16 razy bardziej masywny niż Ziemia).

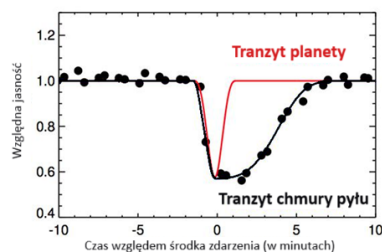
Większość znanych obecnie egzoplanet została odkryta wokół gwiazd ciągu głównego podobnych do Słońca. Nie wiadomo jednak, co dzieje się z układami planetarnymi w kolejnych etapach ewolucji gwiazdy. Gdy w procesie ewolucji gwiazda ciągu głównego staje się coraz większa, powinna pochłaniać kolejne planety. Mimo to naukowcy skierowali teleskopy również na gwiazdy olbrzymy, aby przekonać się, czy układy planetarne mają szansę przetrwać w tak ekstremalnych warunkach. Okazało się, że istnieją planety, które orbitują wokół gwiazd-olbrzymów. W odkrywaniu planet wokół olbrzymów specjalizuje się

Nazwa „ciąg główny” to nazwa obszaru na diagramie Hertzsprunga–Russella (H-R), czyli wykresie klasyfikującym gwiazdy. Na diagramie H-R jedna z osi reprezentuje typ widmowy (lub temperaturę fotosfery albo wskaźnik barwy), a druga jasność absolutną (lub moc promieniowania). Większość gwiazd tworzy właśnie tzw. ciąg główny (rozciągający się wzdłuż przekątnej od prawego dolnego do lewego górnego rogu wykresu). Inne rodzaje gwiazd (olbrzymy, białe karły) zajmują inne obszary na diagramie H-R.

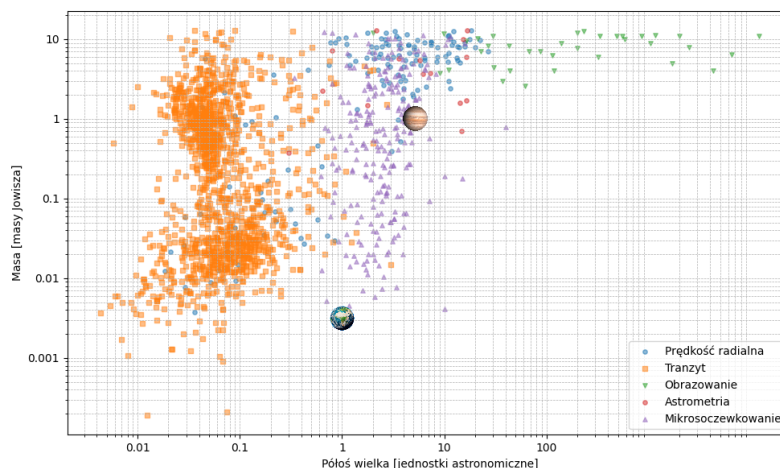




Rys. 2. Spiralne struktury wokół mgławicy planetarnej Kocie Oko (Corradi, *Proc. IAU Symp.*, **2006**, 234, 277)



Rys. 3. Profil tranzytu egzokomety lub planetozymalu wokół białego karła (Vanderburg i in., *Nature*, **2015**, 526, 546)



Rys. 1. Masy oraz promienie orbit egzoplanet odkrytych za pomocą różnych metod

grupa toruńskich naukowców korzystających z teleskopu HET w Stanach Zjednoczonych.

Kolejną interesującą dziedziną są obserwacje **mgławic planetarnych**. Gdy mało lub średnio masywne gwiazdy kończą swoje życie, zamiast wybuchu supernowej odrzucają swoje zewnętrzne warstwy i odsłaniają jasne, gorące jądro. Mgławica planetarna jest właśnie odrzuconą otoczką, zjonizowaną przez promieniowanie gwiazdy. Jednak kształty mgławic planetarnych wskazują na to, że utrata masy nie jest sferycznie symetryczna – postawiono więc hipotezę, że za powstawanie niektórych kształtów mogą odpowiadać planety.

Naukowcom nie udało się do tej pory znaleźć planety krążącej wewnątrz mgławicy planetarnej. Udało się im natomiast odkryć planety krążące wokół białych karłów, będących pozostałością po gwiazdzie olbrzymie [4]. Te odkrycia sugerują, że planeta może przetrwać fazę olbrzyma macierzystej gwiazdy.

Kolejnym z obiektów, które możemy wykrywać poza naszym Układem Słonecznym, są **egzokomety**. Co ciekawe, odkryliśmy je już w 1987 roku.

Tranzyt egzokomety wygląda nieco inaczej niż egzoplanety. Egzokometa powoduje asymetryczne minimum, powstałe w wyniku cząstek pyłu ciągnących się w ogonie komety. Liczne egzokomety zostały zaobserwowane wokół białych karłów. Jest to o tyle łatwiejsze (w porównaniu do gwiazd ciągu głównego), że rozmiary białych karłów są o wiele mniejsze, więc przejście egzokomety powoduje znacznie większe osłabienie jasności niż w przypadku gwiazd ciągu głównego.

Nie mamy jeszcze do tej pory potwierdzonego odkrycia **egzoksiężycy**. Jest jednak kilka metod, które można by tu wykorzystać. W przypadku stosunkowo masywnych egzoksiężyców byłyby to odchyłki od ruchu orbitalnego planety wokół gwiazdy. Egzoksiężyce mogą również być widoczne w zmianie kształtu krzywej blasku podczas tranzytu planety. Ta metoda będzie wykorzystana przez grupę naukowców, którzy zaplanowali obserwacje tranzytu egzoplanety Kepler-167e o okresie orbitalnym trzech lat za pomocą Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba (James Webb Space Telescope, JWST). Szacuje się, że JWST będzie w stanie wykryć satelity planety o rozmiarach podobnych do księżyców Galileuszowych.

Bardzo ciekawym wynikiem jest również odkrycie **pyłowego dysku** wokół egzoplanety PDS 70c wewnątrz dysku protoplanetarnego. Z dysku tego może się uformować egzoksiężyc.

Kontynuowane są również wysiłki zmierzające do wykrycia oddziaływań magnetycznych między egzoplanetami a egzoksiężycami, które mogą emitować spolaryzowane kołowo fale radiowe, podobnie jak układ Jowisz-Io w naszym Układzie Słonecznym. Do tej pory udało się znaleźć za pomocą radioteleskopu LOFAR analogiczne oddziaływania pomiędzy egzoplanetami a gwiazdami.

Bibliografia

- [1] Mróz, P. i inni. *Nature* 548, 183–186 (2017)
- [2] Wolszczan, A., Frail, D. *Nature* 355, 145–147 (1992)
- [3] Mayor, M., Queloz, D. *Nature* 378, 355–359 (1995)
- [4] Vanderburg i in. *Nature*, Volume 585, Issue 7825, p. 363–367
- [5] Vedantham i in. *Nature Astronomy*, Volume 4, p. 577–583

Wielomiany w kombinatoryce

Joanna JASZUŃSKA*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W całym tekście n, j, k są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Symbol Newtona $\binom{n}{j}$ oznacza liczbę sposobów wybrania podzbioru j elementów spośród n różnych. Jest to równoważne wskazaniu $n - j$ elementów niewybranych, więc $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$.

Przyjmujemy, że $\binom{0}{0} = 1$.

Dla $n = 0$ we wzorze (*) mamy $1 = 1$.



W wielu problemach kombinatorycznych pomocne jest badanie odpowiednio dobranych wielomianów, a dokładniej – analizowanie ich współczynników. Przedstawię kilka przykładów o rosnącym stopniu trudności, wprowadzających kolejne przydatne narzędzia i pomysły. Wielokrotnie korzystając będziemy z ważnego wzoru:

$$(*) \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j.$$

Wzór ten uzasadnimy, analizując proces wymnażania n nawiasów. Z każdego z nich wybieramy składnik 1 albo x i mnożymy tak wybranych n elementów, a następnie wszystkie uzyskane w ten sposób iloczyny dodajemy. W efekcie uzyskujemy sumę wyrażeń postaci $1^{n-j} x^j$ dla $j = 0, 1, 2, \dots, n$, przy czym każde z nich pojawia się dokładnie tyle razy, na ile sposobów da się wybrać j nawiasów spośród n (i z nich wziąć element x), czyli właśnie $\binom{n}{j}$ razy. $\square$

Podstawiając $x = 1$, otrzymujemy znany wzór $2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$. Każda z jego stron opisuje liczbę podzbiorów zbioru n -elementowego. Po lewej podzbiór utożsamiamy z ciągiem decyzji wziąć/nie wziąć, podjętych wobec każdego z n kolejnych elementów, stąd 2^n możliwości. Po prawej zaś zliczamy podzbiory według mocy, tzn. osobno liczymy podzbiory o $0, 1, 2, \dots, n$ elementach.

Dalsze ciekawe tożsamości można uzyskać, przyjmując $x = -1$, $x = 2$ itd., a także różniczkując wzór (*) i dopiero później podstawiając za x jakieś wartości. My jednak będziemy odtąd badać tylko wielomiany i ich współczynniki, traktując x jako pomocniczy symbol i nie rozważając żadnych konkretnych jego wartości.

Zadanie 1. Dowieść, że $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$ dla dowolnego n .

Rozwiązanie. Ze wzoru (*) dla wykładnika $2n$ mamy $(1+x)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j$. Współczynnik przy x^n w wielomianie $(1+x)^{2n}$ jest więc równy $\binom{2n}{n}$.

Z drugiej strony, wymnażając czynniki po prawej stronie w iloczynie

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right),$$

wyraz x^n otrzymamy jako $x^j \cdot x^{n-j}$ dla każdego $j = 0, \dots, n$, przy czym przy każdym z tych czynników pojawi się odpowiedni współczynnik: $\binom{n}{j} x^j \cdot \binom{n}{n-j} x^{n-j}$. Stąd współczynnik przy x^n w wielomianie $(1+x)^{2n}$ – równy, jak już wiemy, $\binom{2n}{n}$ – jest jednocześnie równy $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$. $\square$

Zadanie 2. Dowieść, że $\binom{n}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ dla takich n, k , że $n \geq k$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $a_k = \binom{n}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$. Rozważmy wielomian

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 &= \\ &= \binom{n}{n} x^n + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{2}{2} x^2 + \\ &\quad + \binom{n}{1} x^1 + \dots + \binom{2}{1} x^1 + \binom{1}{1} x^1 + \\ &\quad + \binom{n}{0} x^0 + \dots + \binom{2}{0} x^0 + \binom{1}{0} x^0 + \binom{0}{0} x^0 = \\ &= (1+x)^n + \dots + (1+x)^2 + (1+x)^1 + (1+x)^0 = \\ &= \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Uzyskany iloraz jest – wbrew ewentualnym obawom – faktycznie wielomianem zmiennej x : w liczniku po odjęciu 1 zostają wyłącznie składniki o dodatnich potęgach przy x i po podzieleniu przez x z mianownika otrzymujemy wielomian.

Dodajemy kolumnami, korzystając ze wzoru (*).

Korzystamy ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Interesujące nas a_k to współczynnik przy x^k w tym wielomianie, czyli współczynnik przy x^{k+1} w $(1+x)^{n+1} - 1$, a więc – ze wzoru (*) – $\binom{n+1}{k+1}$, co kończy dowód. $\square$

Można oczywiście łatwo sporządzić tabelki możliwych wyników, jednak ten prosty przykład posłuży nam do przedstawienia pewnej ogólniejszej metody.

Zadanie 3. W pewnej grze rzuca się jednocześnie dwiema kostkami czworocziennymi, na każdej może wypaść 1, 2, 3 lub 4, wynikiem jest suma otrzymanych liczb. Jakie są możliwe wyniki i jakie ich prawdopodobieństwa? Jak by się zmieniły, gdyby na jednej z kostek były liczby 1, 2, 2, 3, a na drugiej 1, 3, 3, 5?

Rozwiązanie. Rozważmy następujący iloczyn, w którym każdy z czynników odpowiada jednej kostce, a kolejne wykładniki przy x w danym nawiasie równe są liczbom na tej kostce:

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) = \\ = \sum_{1 \leq j, k \leq 4} x^j \cdot x^k = \sum_{1 \leq j, k \leq 4} x^{j+k} = \sum_{n=2}^8 a_n x^n.$$

Mnożąc te nawiasy, uzyskujemy 16 składników postaci $x^j \cdot x^k = x^{j+k}$. Niektóre się powtarzają, na przykład x^5 występuje cztery razy, bo $1+4=2+3=3+2=4+1$. Współczynniki a_n to właśnie krotności poszczególnych x^n , zatem $a_5 = 4$. Tak otrzymany wielomian opisuje więc możliwe wyniki (występujące w nim wartości n) oraz ich prawdopodobieństwa (w tym przypadku równe $a_n/16$).

Analogicznie dla kostek z liczbami 1, 2, 2, 3 oraz 1, 3, 3, 5 mamy wielomian

$$(x^1 + x^2 + x^2 + x^3) \cdot (x^1 + x^3 + x^3 + x^5) = \\ = x^2 \cdot (1 + 2x + x^2) \cdot (1 + 2x^2 + x^4) = x^2 \cdot (1+x)^2 \cdot (1+x^2)^2 = \\ = (x \cdot (1+x) \cdot (1+x^2))^2 = (x \cdot (1+x+x^2+x^3))^2 = \\ = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2.$$

Czy można napisać takie liczby na kostce ośmiościennej i monecie, by one też równie dobrze nadawały się do tej gry? Warto przy okazji zadania 3 wspomnieć też o tzw. *kościach Sichermana*, czyli dwóch kościach sześciennych różnych od „standardowych”, które dają te same co kości „standardowe” prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych sum oczek. O problemie tym można przeczytać w Δ_{09}^1 .

Jest to dokładnie ten sam wielomian co wcześniej, ma więc takie same współczynniki. Wobec tego nasze nowe kostki dają identyczne sumy z jednakowymi prawdopodobieństwami. $\square$

Zadanie 4. Kupujemy n owoców, przy czym liczba gruszek ma być parzysta, moreli – podzielna przez 5, pomarańczy najwyżej 4, arbuz najwyżej 1 (innych owoców nie rozważamy). Na ile sposobów można spełnić te warunki?

Rozwiązanie. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wymnożmy cztery nawiasy odpowiadające owocom, gdzie wykładniki przy x w każdym nawiasie odpowiadają dopuszczalnym liczbom owoców. Wówczas uzyskamy sumę jednomianów postaci $x^g \cdot x^m \cdot x^p \cdot x^a = x^{g+m+p+a}$, gdzie g odpowiada możliwej liczbie gruszek, m – moreli itd. oraz chcemy, by $g+m+p+a=n$. Wobec tego odpowiedź to współczynnik przy x^n w iloczynie

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots) \cdot (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (1 + x) = \\ = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \\ = (1 + x + x^2 + \dots)^2.$$

Podnosząc $1 + x + x^2 + \dots$ do kwadratu, składnik x^n dostajemy jako $x^j \cdot x^{n-j}$ dla każdego $j = 0, 1, \dots, n$, więc na $n+1$ sposobów. Taki jest zatem poszukiwany współczynnik przy x^n , czyli szukana liczba sposobów wybrania owoców. $\square$

Zadanie 5. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$ ma podzielną przez 3 liczbę elementów?

Rozwiązanie. Niech $q \neq 1$ będzie dowolnym zespolonym pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1 (drugim jest wtedy q^2). Wówczas 1, q i q^2 są rozwiązaniami równania $z^3 - 1 = 0$, czyli $(z-1)(1+z+z^2) = 0$. Stąd $q^3 = 1$ oraz $1 + q + q^2 = 0$ (**).

Nieskończone sumy w nawiasach nie są przeszkodą, możemy bowiem przyjąć, że $|x| < 1$, i skorzystać ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Intuicja podpowiada, że co trzeci, czyli $2^{3n}/3$, ale ta liczba nie jest całkowita, nie jest więc poprawną odpowiedzią.

Korzystając ze wzoru (*), otrzymujemy

$$\begin{aligned}(1+q^0)^{3n} + (1+q^1)^{3n} + (1+q^2)^{3n} &= \\&= \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{0 \cdot j} + \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{1 \cdot j} + \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{2 \cdot j} = \\&= \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} (q^0 + q^j + q^{2j}) = 3 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k},\end{aligned}$$

Obserwacja (***):

ze wzorów (**) dla $j = 3k$ mamy

$q^0 + q^j + q^{2j} = 1 + 1 + 1 = 3$,
a dla pozostałych j otrzymujemy
 $q^0 + q^j + q^{2j} = 1 + q + q^2 = 0$.

przy czym ostatnia równość wynika z obserwacji (***) na marginesie.

Zauważmy teraz, że $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ to dokładnie poszukiwana w zadaniu liczba podzbiorów zbioru $(3n)$ -elementowego o liczbie elementów podzielnej przez 3.

Jednocześnie

$$\begin{aligned}(1+q^0)^{3n} + (1+q^1)^{3n} + (1+q^2)^{3n} &= \\&= 2^{3n} + (-q^2)^{3n} + (-q)^{3n} = 2^{3n} + (-1)^{3n} q^{6n} + (-1)^{3n} q^{3n} = \\&= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n = 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n.\end{aligned}$$

Korzystamy z własności (**) liczby q .

Początkowa intuicja nie była zła.

$$\text{Stąd ostatecznie mamy wynik: } \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = \frac{2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

□

Intuicja znów podpowiada, że co trzeci, czyli około $2^{3n}/3$ i znów okazuje się dość trafna.

Zadanie 6. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$ ma podzielną przez 3 sumę elementów?

Rozwiązanie. Rozważmy wielomian

$$w(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^3) \dots (1+z^{3n}) = \sum_{j=0}^m a_j z^j \text{ dla } m = 1 + 2 + \dots + 3n.$$

Przykładowo, dla $n \geq 2$ mamy
 $z^1 \cdot z^2 \cdot z^3 = z^1 \cdot z^5 = z^2 \cdot z^4 = z^6$
oraz sumę 6 mają cztery podzbiory:
 $\{1, 2, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}$, zatem $a_6 = 4$
(podobne rozumowanie pojawiło się
w zadaniach 3 i 4).

Po wymnożeniu nawiasów, każdy składnik z^j pojawia się tyle razy, na ile sposobów można go uzyskać jako iloczyn parami różnych potęg z (bo wybranych z różnych nawiasów), czyli tyle razy, na ile sposobów można uzyskać wykładnik j jako sumę elementów pewnego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$.

Szukaną odpowiedzią na pytanie z zadania jest zatem wartość wyrażenia

$$a_0 + a_3 + a_6 + \dots$$

Niech q będzie określone tak samo, jak w poprzednim zadaniu. Wówczas

$$\begin{aligned}w(q^0) + w(q^1) + w(q^2) &= a_0(q^0)^0 + a_1(q^0)^1 + a_2(q^0)^2 + \dots + a_m(q^0)^m + \\&\quad + a_0(q^1)^0 + a_1(q^1)^1 + a_2(q^1)^2 + \dots + a_m(q^1)^m + \\&\quad + a_0(q^2)^0 + a_1(q^2)^1 + a_2(q^2)^2 + \dots + a_m(q^2)^m = \\&= \sum_{j=0}^m a_j ((q^0)^j + (q^1)^j + (q^2)^j) = 3 \cdot (a_0 + a_3 + a_6 + \dots),\end{aligned}$$

Dodajemy kolumnami, jak w zadaniu 2.

ostatnia równość znów wynika z obserwacji (***) , na marginesie przy zadaniu 5.

Wyznamy ponownie $w(q^0) + w(q^1) + w(q^2)$ korzystając z definicji wielomianu $w(z)$, liczby q oraz jej własności (**):

$$\begin{aligned}w(q^0) &= w(1) = 2^{3n}, \\w(q^1) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3) \dots (1+q^{3n}) = ((1+q)(1+q^2)(1+q^3))^n = \\&= ((-q^2)(-q)(2))^n = 2^n, \\w(q^2) &= 2^n \text{ (analogicznie)}.\end{aligned}$$

Stąd ostatecznie $w(q^0) + w(q^1) + w(q^2) = 2^{3n} + 2 \cdot 2^n$ i wobec tego mamy wynik:

$$a_0 + a_3 + a_6 + \dots = \frac{2^{3n} + 2 \cdot 2^n}{3}.$$

□

Dodatkowa literatura:

Joanna Jaszńska,

Ścieżki i wielomiany, Δ_{13}^9

Karol Gryszka,

Ułamki Fibonacciego, Δ_{21}^2

Wojciech Guzicki,

Kombinatoryka. Rozszerzony program matematyki w liceum (rozdział 8),
Wydawnictwo Szkolne OMEGA,
Tarnów 2024

Zachęcam do poszukiwania innych rozwiązań powyższych zadań (zapewniam, że istnieją liczne i różnorodne!) oraz innych problemów, które można rozwiązać przy użyciu zaprezentowanych tu metod. Zainteresowanym dalszą lekturą polecam przedstawione na marginesie teksty, a także wyszukiwanie w literaturze terminu *funkcje tworzące*.



Prawdziwy żyrandol Galileusza



Toskania dla ściślaka

Marcin BRAUN

Nauczyciel fizyki i matematyki w 42 Autorskim LO w Warszawie

Przepiękne miasta i krajobrazy, muzea pełne najwybitniejszych dzieł – to wszystko możemy podziwiać jak każdy turysta. Mamy jednak coś jeszcze: miejsca związane z nauką.

Największym miastem Toskanii jest Florencja, ale lot do niej kosztuje sporo, a przy okazji bardzo krótki pas startowy pozwala zaobserwować zależność sił bezwładności od drogi hamowania. Osoby o cieńszych portfelach lub delikatniejszych żołądkach mogą się udać tanimi liniami do Pizy. W Pizie, oczywiście, odwiedzić należy słynną Krzywą Wieżę, czyli dzwonnice, z której Galileusz najprawdopodobniej niczego nie zrzucił. To na razie mało zachęcające – dzwonnice, z której Galileusz niczego nie zrzucił, prościej i taniej obejrzymy w najbliższej parafii. Jednak na wieżę warto wejść nie tylko dla wspaniałych widoków, ale i po to, żeby zobaczyć urządzenia służące utrzymaniu jej – nie, nie w pionie, ale w dotychczasowym przechyle.

Zapoznamy się także z danymi liczbowymi, które pozwolą obliczyć, czy środek ciężkości wieży wyszedł poza jej podstawę. Bo jeśli wyszedł... jeśli wyszedł, to nic nie znaczy: w takim wypadku wywraca się ciało stojące na płaskiej i twardej powierzchni. Dla wieży z fundamentem w miękkim gruncie tak być nie musi, ale i w drugą stronę – nic nie wynika: środek ciężkości nad podstawą nie oznacza, że wieża wróci sama do pionu. Jak bardzo krzywa jest Krzywa Wieża? Zmierzyłem to na jej szczycie za pomocą aplikacji Phyphox – wynik $4,5^\circ$ pasował do ostatnich danych na tablicy informacyjnej. Podobnie wyszło na zdjęciu, choć niełatwo było wykonać je w płaszczyźnie przechyłu wieży. Autorzy plakatu wiszącego w pobliżu uznali chyba, że to zbyt mało, i postanowili przechylić wieżę zdecydowanie bardziej.

Lampy Galileusza

Tuż przy dzwonnicy, w katedrze, znajduje się żyrandol, który według legendy obserwował Galileusz, aby stwierdzić, że okres wahań nie zależy od amplitudy. W rzeczywistości obserwował żyrandol, ale inny – niestety ten mniej efektowny, znajdujący się tuż obok, w kaplicy Aulla w Campo Santo. Warto wcześniej zobaczyć zdjęcie, aby wiedzieć, czego szukamy.

Interesującym miejscem może być także muzeum maszyn liczących. W czasie mojego pobytu było niestety zamknięte.

Florencja

Z Pizy do Florencji dostrzemy pociągami. W stolicy Toskanii, w bazylice Św. Krzyża (Basilica di Santa Croce) znajdziemy grób Galileusza, a także tablice pamiątkowe wielu zasłużonych Włochów, wśród nich Enrico Fermiego.

Skoro mowa o Galileuszu, to miejscowe muzeum nauki także nazwano jego imieniem (Museo Galileo). Znajdziemy tam m.in. astrolabia, maszyny elektrostatyczne, wagę z krzeselkiem dla ważonego, a także gigantyczny ruchomy (przynajmniej ruchomy kiedyś) model Układu Słonecznego, jeszcze z Ziemią pośrodku. I na tym właściwie można by skończyć, bo kolejne miejsca związane z naukami ścisłymi znajdziemy na mapie w muzeum. Ale nie skończymy...

Temperantia

Muzeum nauki nie odeśle nas bowiem do znajdującego się w galerii Uffizi obrazu pędzla Piero del Pollaiuolo przedstawiającego personifikację cnoty Umiarkowania. Umiarkowanie to po łacinie *Temperantia*, od tego słowa pochodzi właśnie nasza temperatura, a piękna niewiasta uosabiająca tę cnotę na obrazie zajmuje się... mieszaniami ciepłej wody z zimną.

Jaki związek ma miara energii ruchu cząsteczek z cnotą kardynalną? Aby to wyjaśnić, trzeba sobie przypomnieć o dawnym poglądzie, że ciepło i zimno to



dwie różne jakości (a więc zimno to nie jest mało ciepła). Różne temperatury uważano za różne stopnie wymieszania tych jakości. Taki pogląd nie ma uzasadnienia w fizyce, ale w fizjologii – i owszem, bo nasz organizm ma osobne neurony przekazujące informację o tym, że jest zimno, i osobne – że jest ciepło.

Na koniec – spaghetti!

Wieczorem przychodzi pora na kolację. Jeśli chcemy samodzielnie ugotować spaghetti, możemy kupić miarkę pozwalającą właściwie dobrać ilość dla jednej, dwóch czy więcej osób. Gdy popatrzymy na otwory gołym okiem, trudno będzie uwierzyć, że dwie osoby mają dostać dwa razy więcej niż jedna. Pomiar pokazuje jednak, że średnice otworów mają się do siebie jak $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, a przeciętne ilości odmierzanego makaronu jest proporcjonalna do powierzchni otworu, a nie do jego średnicy. Podobnie – skoro już mowa o włoskim jedzeniu – jest z pizzą. Na dwie osoby nie zamawiamy takiej o dwa razy większym promieniu. Pamiętając o tym, najemy się, ale nie obrazimy cnoty Umiarkowania.



Życie albo nieżycie? Oto jest pytanie

Dr Kenneth Smith we wstępie do książki „Viruses” z 1962 roku (wyd. Cambridge University Press) pisze: „Jeśli chodzi o najczęściej zadawane pytanie: *Czy wirusy są organizmami żywymi?*, odpowiedź należy pozostawić samemu pytającemu”. W ten sposób pointuje raczej filozoficzne rozważania sprowadzające się do pytania, jaka jest definicja życia. Nie raz już zżymałam się w moim deltowym kąciku, że kiedyś wszystko było prostsze; czy coś żyje, czy nie żyje, było widać ot tak, na rzut oka. Ssaka kopytnego definiowano zdaniem: „koń jaki jest, każdy widzi”. Tymczasem postęp nauki oraz metod badawczych coraz bardziej utrudnia te sprawy. Coś może być – choć nikt tego nie zobaczył, nawet przez mikroskop.

Oznaczanie nieznanymi gatunków przyspieszyło dzięki Craigowi Venterowi, który arogancko rzucił wyzwanie projektowi sekwencjonowania genomu ludzkiego, dzięki czemu poznaliśmy ludzkie geny w ekspresowym w stosunku do założeń czasie. Przeniósł swoje rewolucyjne podejście również na wody oceanów, inicjując ambitny projekt masowej analizy genomów mikroorganizmów morskich. Jego sztandarowym przedsięwzięciem był projekt Global Ocean Sampling Expedition, prowadzony przez ponad dwa lata (2003–2005) na jachcie badawczym *Sorcerer II*. Zamiast tradycyjnie izolować pojedyncze szczepy mikroorganizmów (co jest metodą wykluczającą oznakowanie gatunków niemożliwych do wyhodowania w laboratorium) Venter zastosował sekwencjonowanie genomów metodą „shotgun”. Polegało to na pobieraniu próbek wody morskiej, odfiltrowywaniu z nich mikroorganizmów, a następnie losowym sekwencjonowaniu całego DNA obecnego w próbce, bez konieczności uprzedniej izolacji poszczególnych organizmów. Algorytmy składały fragmenty DNA w całe genomy, które podlegały identyfikacji do potencjalnych gatunków. Wskazano istnienie co najmniej 1800 nowych „gatunków genomowych”, w tym 148 nieznanymi wcześniej odrębnych ewolucyjnie grup bakterii.

I oto żyjemy w czasach, kiedy naukowcy odkrywają genom, który „należy” do żywego organizmu, ale ponieważ nikt go nie widział, powstaje termin „candidatus” – który pozwala uznać, że istnieje odpowiadający genomowi żywy organizm, ale póki go się nie wyodrębni ze środowiska,

nie może formalnie zostać przyjęty do grona znanych gatunków. W czerwcu w serwisie bioRxiv ukazał się preprint naukowców z Japonii, który opisuje *Candidatus Sukunaarchaeum mirabile*. Pierwotnym celem badań był jednak inny organizm, *Citharistes regius*, należący do jednokomórkowych glonów zwanych bruzdnicami. Występujące powszechnie w oceanach bruzdnice znane są z tego, że we wnętrzu ich komórek występują symbiotyczne lub pasożytnicze bakterie. Badacze po odłowieniu stosownej liczby bruzdnic rozpoczęli sekwencjonowanie zawartego w ich wnętrzach materiału genetycznego. Oprócz sekwencji odpowiadającej gospodarzowi we wnętrzu bruzdnicy odkryto (zgodnie z oczekiwaniami) genom symbiotycznej sinicy oraz dwa genomy, zapewne pasożytniczych, bakterii. A także jedną tajemniczą kolistą cząsteczkę DNA o nieznanym funkcji.

Dalsze badania wskazują, że nowa cząsteczka z dużym prawdopodobieństwem jest materiałem genetycznym nieznanego dotąd organizmu, który zakwalifikowano do archeonów. Archeony to odrębna od bakterii grupa prokariontów. Są one o tyle istotne, że choć są najbardziej prymitywnymi komórkami na Ziemi, z nich rozwinęła się linia komórek wiodąca do organizmów wyższych. I wirusów. Nazwa rodzajowa „Sukunaarchaeum” odwołuje się do Sukunabikony, małego skrzydlatego bóstwa z japońskiej mitologii shinto, o którym bóg Takamimusubi mówi: „Liczba dzieci, które spłodziłem, wynosi tysiąc i pięćset. Wśród nich było jedno dziecko wyjątkowo niesforne i nieposłuszne. Przemknęło mi się kiedyś między palcami i spadło”. (cytat z Wikipedii). Mirabile to

Istnieje wiele hipotez, skąd wzięły się wirusy na Ziemi. Z najważniejszych pierwsza, hipoteza ucieczki, mówi o tym, że wirusy powstały z ruchomych fragmentów genomów, które „uciekły” z komórek. Druga, hipoteza koewolucji, głosi, że wirusy istniały, zanim powstały komórki, a następnie ewoluowały wspólnie z nimi. Trzecia, hipoteza regresywna, głosi, że

Ryo Harada, Yuki Nishimura, Mami Nomura, Akinori Yabuki, Kogiku Shiba, Kazuo Inaba, Yuji Inagaki, Takuro Nakayama, *A cellular entity retaining only its replicative core: Hidden archaeal lineage with an ultra-reduced genome*, bioRxiv (2025): 2025-05

Kąt Ostry 6°: 1, 2, 3, ..., 5 607 249

Politechnika Śląska

[illegible]

Liczba atomów w obserwowalnym
Wszechświecie jest szacowana na około
 10^{80} – o dwadzieścia rzędów wielkości
mniej niż googol.

Przywodzi to na myśl błahe skojarzenie z pewnym francuskim matematykiem, który urodził się niewiele ponad sto lat temu w Polsce.

do szóstego progu artysta musiał czekać 7 lat. Doszedł wtedy do wniosku, że kolejny próg – 7 777 777 – osiągnie po trzech dekadach. Tak się jednak nie stało. Projekt był przez Opalkę rozwijany do jego śmierci, w 2011 roku, i ostatnią zapisaną przez niego liczbą jest 5 607 249 znajdująca się na nieukończonym 508. *Detalu*.



O modelu Λ CDM pisał Szymon Charzyński w Δ_{23}^2

Nazwa Λ CDM pochodzi od składników Wszechświata. Λ to oznaczenie stałej kosmologicznej (ciemnej energii), a CDM to skrót od „Cold Dark Matter” – Zimna Ciemna Materia.

O rozbieżnościach pomiędzy różnymi metodami wyznaczania stałej Hubble’a pisał Krzysztof Turzyński w Δ_{19}^{11} .

Warto zaznaczyć, że mimo prostoty założenia Timescapes prowadzą do znacznie trudniejszych obliczeń niż w przypadku Λ CDM.

W klasycznej kosmologii fotony też są przesunięte do czerwieni w wyniku rozszerzania się przestrzeni – dlatego na przykład spada temperatura Mikrofalowego Promieniowania Tła. Timescapes zakłada dodatkowe przesunięcie, wynikające z opisanej dystrybucji materii.

„Tylko trochę dokładniejsze” oznacza w tym wypadku ok. 2σ , gdzie σ to miara tego, z jak dużym błędem statystycznym mamy do czynienia. Standardem w fizyce jest ogłaszanie odkryć naukowych przy wartości 5σ . Timescapes osiąga je tylko dla bardzo bliskich supernowych.

Timescapes – struktura Wszechświata a ciemna energia

Czy kosmologia stoi właśnie w obliczu przełomu? Czy ciemna energia jest tylko iluzją? Czy jeden z filarów współczesnej fizyki chwieje się w posadach? Tego typu pytania mogli zadawać sobie miłośnicy naukowych sensacji na przełomie ubiegłego roku, czytając nagłówki w mediach popularnonaukowych. Czy naprawdę jest się czym ekscytować? I o co właściwie chodzi? Poniżej krótko wyjaśniamy, co tak naprawdę się wydarzyło.

Na początek warto przypomnieć, że obecnie obowiązującym modelem kosmologicznym jest **model Λ CDM**. Wychodzi on od faktu, że dynamikę rozszerzania się Wszechświata wyznaczają jego składniki, w tym przede wszystkim: widzialna materia ($\sim 5\%$), ciemna materia ($\sim 27\%$) i ciemna energia ($\sim 68\%$). Następnie zakłada ich ogólne własności i (co ważne) stałą gęstość w przestrzeni. Innymi słowy, rozważa się tylko uśrednioną gęstość poszczególnych składników i pomija wszelkie fluktuacje gęstości materii, takie jak supergromady galaktyk czy puste przestrzenie pomiędzy nimi. To pozwala dość prosto opisać tempo rozszerzania się Wszechświata.

Choć teoria Λ CDM jest obecnie dość mocno ugruntowana w środowisku kosmologów i astrofizyków, to cały czas podejmowane są próby znalezienia alternatywy – szczególnie takiej, która nie potrzebowałaby istnienia ciemnej materii lub ciemnej energii. Istnienie tych ostatnich postuluje się właśnie po to, żeby pogodzić modele z obserwacjami, ale ciemna materia i ciemna energia jak dotąd umykają naszym próbom ich bezpośredniej detekcji. Innym powodem szukania alternatywnych modeli są pewne problemy z przewidywaniami samego Λ CDM, z których najbardziej istotna jest rozbieżność w pomiarach stałej Hubble’a. Stała ta mierzona za pomocą świec standardowych daje inny wynik, niż gdy wyznacza się ją przez analizę Mikrofalowego Promieniowania Tła.

Wymienione problemy, nad którymi pracowano przez lata, pozwoliły stworzyć peleton potencjalnych kandydatów na nową podstawową teorię kosmologii. Na czoło tego peletonu wysunęła się hipoteza **Timescapes**. Jej założeniem jest – przeciwnie do Λ CDM – uwzględnienie lokalnych niejednorodności materii. Dzieli ona Wszechświat na dwa obszary: *pustki* i rozdziela je *ściany* materii, odwzorowując w ten sposób obserwowaną strukturę Wszechświata. Ponieważ pustki zawierają znacznie mniej materii, więc zgodnie z ogólną teorią względności czas płynie w nich szybciej niż w gęstszych regionach. To oznacza, że rozszerzają się szybciej niż obszary, w których znajdują się galaktyki.

Kluczowa w modelu Timescapes jest obserwacja, że światło z odległych galaktyk, zanim do nas dotrze, musi przebyć wiele obszarów pustki, gdzie – w związku z szybszym rozszerzaniem się przestrzeni – odczuwa wydłużenie fali. W efekcie obserwujemy je jako bardziej przesunięte ku czerwieni, i tworzy to złudzenie, jak gdyby odległe galaktyki się od nas oddalały szybciej niż w rzeczywistości. W skrócie Timescapes sugeruje, że to struktura Wszechświata, a nie ciemna energia, powoduje pozorne przyspieszanie ekspansji.

Paliwem dla zwolenników tej teorii okazał się jednak najnowszy wynik z grudnia 2024 roku, w którym dokonano analizy dużego zbioru Pantheon+ zawierającego obserwacje supernowych typu 1a. Wyniki analizy wskazują, że Timescapes radzi sobie w ich przewidywaniach lepiej niż Λ CDM.

Czy to jednak rzeczywiście może oznaczać przewrót we współczesnej kosmologii? Niekoniecznie. Po pierwsze model działa zdecydowanie lepiej dla bliskich supernowych. Na większych odległościach, gdzie Λ CDM powinien działać lepiej (biorąc pod uwagę założenie o jednorodności Wszechświata), Timescapes okazuje się tylko trochę dokładniejsze.

Przede wszystkim jednak Λ CDM jest dużo bardziej ugruntowaną teorią, a potwierdzają ją nie tylko obserwacje supernowych. Potrafi ona wyjaśnić istnienie Barionowych Oscylacji Akustycznych czy opisać proces tworzenia się wielkoskalowych struktur Wszechświata. Aby osiągnąć pełen sukces, hipoteza Timescapes powinna zmierzyć się również z tymi zjawiskami, a także zaproponować własne przewidywania – na przykład tam, gdzie Λ CDM radzi sobie słabo.

Krytycy Timescapes twierdzą, że przewidywane przez teorię efekty są zbyt małe, aby mogły wytłumaczyć obserwowane zjawiska bez odwoływania się do ciemnej energii. Nie zmienia to jednak faktu, że warto obserwować postępy przedstawionych prac. Kosmologia wciąż stawia wiele pytań, na które brakuje odpowiedzi.

Wiktor MATYSZKIEWICZ

Jak zaokrągać liczby?

Wojciech PRZYBYSZEWSKI*

Część Czytelników po przeczytaniu tytułu tego artykułu pomyślała z pewnością, że to jakiś żart. W zaokrąglaniu liczb nie ma żadnej filozofii – jeśli chcę zaokrąglić liczbę do k miejsc po przecinku, to patrzę na cyfrę na pozycji $(k + 1)$ -szej i jeśli jest ona mniejsza niż 5, to ucinam wszystkie cyfry za pozycją k -tą, a w przeciwnym przypadku dodaję 1 na pozycji k -tej, również pomijając resztę zapisu. Od tej zasady są wprowadzone wyjątki – lubimy zaokrągać w górę rzeczy, które o nas dobrze świadczą (np. średnią ocen) albo kiedy liczymy się z jakimś ryzykiem (np. błędy pomiaru). Wysyłając stolarzowi wymiary wnętrza na szafę, raczej zaokrąglimy je w dół, gdyż odrobinę za szeroki mebel jest znacznie bardziej problematyczny niż odrobinę za wąski. Niemniej jednak, każdy wie, o co chodzi, więc możemy zakończyć artykuł w tym miejscu.

Niestety, mimo że wiedza o zaokrąglaniu i jego konsekwencjach jest powszechna, cały czas ta procedura prowadzi do pewnych niejasności.

Prawdziwe wartości	34.6	31.6	15.6	12.6	8.6
Po zaokrągleniu	35	32	16	13	9

Przed zaokrągleniem suma wynosiła 100.0, a po zaokrągleniu 102.0.

„Dlaczego odpowiedzi ankietowanych dodają się w sumie do 102%?” – możemy usłyszeć, kiedy ktoś chce podważyć wyniki pewnej sondy, najczęściej sondażu wyborczego, w którym jego ulubiona partia wypadła poniżej oczekiwań.

Powstaje więc pytanie, w jaki sposób zaokrąglić n liczb sumujących się do określonej wartości S tak, żeby po zaokrągleniu ich suma nadal wynosiła S . Warto zauważyć, że rozwiązanie tego problemu ma dużo szersze zastosowania, w szczególności kiedy musimy rozdzielić niepodzielne zasoby. Najbardziej oczywistym przykładem takiej sytuacji są wybory do wszelkiej maści ciał kolegialnych (np. sejmiku), kiedy nie możemy przypisywać startującym tam komitetom ułamkowych miejsc (nie można zostać połową posła).

Funkcje zaokrąglające

Najogólniej funkcję zaokrąglającą możemy zdefiniować poprzez ciąg takich wartości $s = s_0, s_1, s_2, \dots$, że $k \leq s_k \leq k + 1$. Wtedy funkcja zaokrąglająca r_s odpowiadająca takiemu ciągowi s przypisuje każdej liczbie $x \in \mathbb{R}_+$ jej zaokrąglenie, to znaczy, jeśli $x \in [k, k + 1)$, to

$$\begin{cases} r_s(x) = k & \text{jeśli } x \leq s_k; \\ r_s(x) = k + 1 & \text{jeśli } x > s_k. \end{cases}$$

Przyjęliśmy tutaj dość arbitralnie, że w przypadku gdy $x = s_k$, zaokrąglamy do k , a nie $k + 1$. Nie jest to jednak nic istotnego w dalszych rozważaniach, ale upraszcza analizę.

Szczególnym przykładem funkcji zaokrąglających są **funkcje stacjonarne** r_q dla $0 \leq q \leq 1$. Funkcja stacjonarna r_q definiowana jest przez ciąg $s_k = k + q$ dla każdego k . Zauważmy, że funkcja r_0 to zwykłe zaokrąglanie w górę, r_1 to zaokrąglanie w dół, a $r_{1/2}$ to wspomniane na początku artykułu zaokrąglanie do najbliższej liczby całkowitej.

Metody mnożnikowe

Nasz oryginalny problem dotyczący zaokrąglania sondażowych wyników najłatwiej analizować, zakładając, że mamy dane n nieujemnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ sumujących się do 1 oraz pewną liczbę S . Naszym celem jest znalezienie takich n liczb całkowitych $y_1, y_2, \dots, y_n$, że $y_1 + y_2 + \dots + y_n = S$ oraz y_i jest w jakimś sensie zaokrągleniem $x_i \cdot S$.

Ogólnie taki problem można rozwiązywać przy użyciu *metod mnożnikowych*. Dla dowolnej funkcji zaokrąglającej r , ciągu nieujemnych liczb $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$



XXVIII Dolnośląski Festiwal Nauki – „Nauka jest chrobra”

Tegoroczna, XXVIII edycja Dolnośląskiego Festiwalu Nauki odbywa się pod hasłem „Nauka jest chrobra”, które nawiązuje do 1000-lecia koronacji Bolesława Chrobrego – pierwszego króla Polski – i symbolicznie łączy odwagę władcy z odwagą poznawczą, jakiej wymaga podejmowanie wyzwań naukowych we współczesnym świecie. Hasło to stanowi również wyraz dumy z lokalnego dziedzictwa Dolnego Śląska i znaczenia nauki jako czynnika rozwoju społecznego.

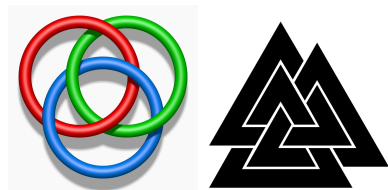
Edycja wrocławska (13–21 września 2025) zainauguruje Festiwal serią wydarzeń na terenie największych wrocławskich uczelni. Szczególnym akcentem będzie **Miasteczko Naukowe** – wielki popularnonaukowy piknik edukacyjny, który po raz pierwszy odbędzie się na terenie Papieskiego Wydziału Teologicznego we Wrocławiu. Stoiska, eksperymenty, pokazy, warsztaty i atrakcje dla całych rodzin pokażą naukę w działaniu i w dostępnej formie.

Edycja regionalna (25 września–31 października 2025) obejmie ponad 10 miast Dolnego Śląska – od Legnicy przez Głogów, Jelenią Górę i Zgorzelec po Kłodzko i Żąbkowice Śląskie. Lokalne ośrodki akademickie i instytucje kultury zaproszą do wspólnego odkrywania nauki w kontekście regionalnym.

W ramach całego Festiwalu zaplanowano **ponad 1800 bezpłatnych wydarzeń**: wykładów, pokazów, debat, warsztatów, spacerów naukowych i spotkań z naukowcami. To największe święto nauki na Dolnym Śląsku, otwarte dla wszystkich – od przedszkolaków po seniorów.

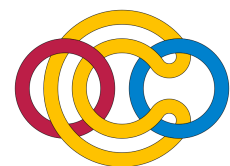
Rozwiązania zagadek z artykułu Pierścienie Boromeuszy a wieszanie obrazków (s. 5)

1. Najprostsze rozwiązanie głównej zagadki to pierścienie Boromeuszy, poniżej w wersji klasycznej oraz trójkątnej (wałkut).



Źródło: Wikimedia Commons

2. (Zarys) Pętle A i C nie są splecione, więc nasz splot możemy przekształcić do poniższego (od lewej: A, B, C). Teraz na C rozpinamy płaski dysk – jest on rozłączny z A , ale przecina B w dwóch miejscach. By usunąć przecięcia, wycinamy w dysku dwa okrągłe otwory. Wreszcie otwory te zalepiamy, wklejając „turkę” od jednego do drugiego z nich. To już można zrobić bez kolizji, prowadząc tę rurkę wzdłuż pętli B niczym opłot kabla.



Źródło: Wikimedia Commons

3. Powierzchnię tę konstruujemy jak w zagadce 2: na F rozpinamy dysk, wycinamy dwa otwory i wklejamy rurkę. Jedyną różnicą jest taka, że teraz jeden koniec rurki jest doprowadzony „od góry”, a drugi „od dołu”, więc zewnętrzna powierzchnia rurki łączy górną i dolną część dysku. W efekcie otrzymujemy powierzchnię jednostronną, a więc nieorientowalną. Istnienie takiej powierzchni może zaskakiwać, ale również jest wyjaśniane przez twierdzenie Hurewicza, tym razem ze współczynnikami w $\mathbb{Z}_2$.

4. Przykładowe rozwiązanie widać niżej. Powierzchnię tego typu (zwartą, spójną, zorientowaną, o z góry zadany brzeg) nazywamy *powierzchnią Seiferta*. Można podać prosty przepis (*algorytm Seiferta*) na taką powierzchnię w ogólnym przypadku, ale nie zmieściłby się na tym marginesie.



Źródło: Accelerometer, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

sumujących się do 1 oraz liczby S możemy zdefiniować dopuszczalne zaokrąglenia jako:

$$M_r(x, S) = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n y_i = S \text{ oraz istnieje } \nu > 0 \text{ spełniające } y_i = r(x_i \cdot \nu) \right\}.$$

Innymi słowy, skalujemy wszystkie liczby $x_1, \dots, x_n$ z pewną stałą (*mnożnikiem*) $\nu > 0$, zaokrąglamy je zgodnie z regułą r , a uzyskany wynik uznajemy za dobry, jeśli suma zaokrągleń wynosi S .

Łatwo wykazać, że dla dowolnych r_q, x, S zbiór $M_{r_q}(x, S)$ ma co najwyżej jeden element, ale w niektórych przypadkach może być pusty. Na przykład przy zaokrąglaniu w dół r_1 i danych $x_1 = 1/3, x_2 = 2/3$ oraz $S = 2$, biorąc $\nu < 3$, będziemy mieli $r_1(1/3 \cdot \nu) + r_1(2/3 \cdot \nu) \leq 1$, a dla $\nu \geq 3$ zachodzi $r_1(1/3 \cdot \nu) + r_1(2/3 \cdot \nu) \geq 3$.

Metody mnożnikowe są dość popularne w zastosowaniach praktycznych. Na przykład metoda d'Hondta, stosowana w wyborach do polskiego sejmiku, jest metodą mnożnikową korzystającą z zaokrągleń w dół (czyli r_1). Dla przykładu przeanalizujemy wyniki w ostatnich wyborach do sejmiku, w 2023 roku, w okręgu numer 19 (obejmującym miasto Warszawę). Można było tam głosować na 7 komitetów wyborczych, z których 5 przekroczyło próg wyborczy i brało udział w podziale 20 mandatów. Komitety te otrzymały (w kolejności malejącej) 741286, 345380, 230648, 227127 i 124220 głosów. Dzieliąc te liczby przez sumę wszystkich głosów oddanych na komitety, które przekroczyły próg wyborczy (czyli 1668661), otrzymujemy $x = (0.444, 0.207, 0.138, 0.136, 0.074)$. Aby obliczyć podział mandatów, musimy znaleźć $M_{r_1}(x, 20)$. Czytelnik zechce sprawdzić, że w tym celu można wziąć dowolną wartość ν z przedziału (z dokładnością do nomen omen zaokrąglenia) $(22.04, 22.51)$, i każda z nich da ten sam podział mandatów. Dla przykładu, biorąc $\nu = 22.3$ i skalując przez nie wektor x , otrzymamy $(9.91, 4.62, 3.08, 3.04, 1.66)$, a po zaokrągleniu tych liczb w dół dostajemy podział mandatów $(9, 4, 3, 3, 1)$. Czytelnik Wnikliwy zechce sprawdzić, że te wyliczenia pokrywają się z oficjalnymi wynikami wyborów podanymi na stronie Państwowej Komisji Wyborczej.

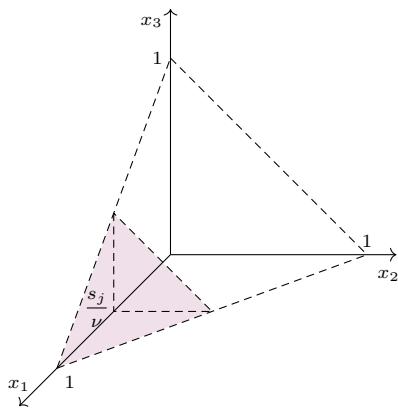
Problem znalezienia odpowiedniego mnożnika ν nie wydaje się zbyt skomplikowany dla konkretnych danych wejściowych. Przy za małym ν wartości $r(x_i \cdot \nu)$ będą sumować się do wartości mniejszej niż S , a przy ν za dużym – do wartości większej niż S . W związku z tym możemy nasze ν eksperymentalnie zwiększać lub zmniejszać, aż znajdziemy odpowiednią wartość.

Sytuacja komplikuje się, kiedy nie znamy dokładnych wartości $x_1, \dots, x_n$. Jest to typowy problem z przeliczaniem wyników sondażowych na faktyczny podział mandatów w polskim sejmie. Zauważmy, że publikowane sondaże pokazują szacunkowe poparcie komitetów wyborczych w skali całego kraju, ale podział mandatów odbywa się w poszczególnych okręgach wyborczych, różniących się ilością przydzielanych mandatów, a nierzadko także preferencjami wyborców, mogącymi znacząco odbiegać od ogólnokrajowej średniej. Jak w takim razie przeliczyć wyniki sondażowe na faktyczny podział mandatów? W tym celu musimy sięgnąć po aparat rachunku prawdopodobieństwa.

Losowe wartości

Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\mathcal{S}_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ nazywanym $(n-1)$ -wymiarowym sympleksem. Na przykład dla $n = 3$ wektor (X_1, X_2, X_3) to punkt losowo (jednostajnie) wybrany z trójkąta o wierzchołkach $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ i $(1, 0, 0)$. Ponieważ liczby $X_1, \dots, X_n$ sumują się do 1, więc możemy je interpretować jako proporcje głosów oddanych na poszczególne komitety wyborcze w danym okręgu. Dla danej wartości ν zdefiniujemy

$$T_n(\nu) = \sum_{i=1}^n r(X_i \cdot \nu),$$



czyli sumę n losowych liczb $X_1, \dots, X_n$ przeskalowanych przez ν i zaokrąglonych zgodnie z regułą r . Wykażemy, że jeśli reguła zaokrąglania r dana jest przez ciąg $s_0, s_1, \dots$, to

$$\mathbb{E} T_n(\nu) = n \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{s_j}{\nu}\right)^{n-1},$$

gdzie k jest największym indeksem, dla którego $s_k \leq \nu$.

Dowód. Niech $N_1 = r(\nu X_1)$. Z liniowości wartości oczekiwanej mamy $\mathbb{E} T_n(\nu) = n \mathbb{E} N_1$. Dla danej liczby całkowitej $j \leq k$ zachodzi $N_1 > j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_1 > s_j/\nu$. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że $\mathbb{P}(N_1 > j) = \mathbb{P}(X_1 > s_j/\nu) = (1 - s_j/\nu)^{n-1}$, co w szczególności daje nam

$$\mathbb{E} T_n(\nu) = n \mathbb{E} N_1 = n \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(N_1 > j) = n \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{s_j}{\nu}\right)^{n-1}. \quad \square$$

Nietrudno zauważyć, że funkcja $f(\nu) = n \sum_{j=0}^k (1 - s_j/\nu)^{n-1}$ jest funkcją ciągłą na przedziale $(0, \infty)$ i rosnącą względem ν , a więc dla ustalonych S i n istnieje jedyne takie ν , że $\mathbb{E} T_n(\nu) = S$.

Jasne jest, że dla każdej stacjonarnej funkcji zaokrąglającej r_q zachodzi $\nu X_i - q \leq r_q(\nu X_i) \leq \nu X_i + 1 - q$. Sumując te nierówności, dostajemy $\nu - nq \leq T_n(\nu) \leq \nu + n(1 - q)$. Biorąc $\nu = S + n(q - 1/2)$, dostajemy symetryczne ograniczenia:

$$S - n/2 \leq T_n(S + n(q - 1/2)) \leq S + n/2.$$

Niezbyt skomplikowana, ale dość długa analiza pokazuje, że dla dowolnego ν zachodzi

$$\mathbb{E} T_n(\nu) = \nu - n(q - 1/2) + \mathcal{O}(1/\nu),$$

więc dla $\nu_S = S + n(q - 1/2)$ mamy

$$\mathbb{E} T_n(\nu_S) = S + \mathcal{O}(1/S),$$

co oznacza, że dla dużych wartości S wartość oczekiwana $T_n(\nu_S)$ jest bliska S . Daje nam to intuicję, że używanie ν_S jako mnożnika daje nam dobre przybliżenie podziału mandatów.

Bibliografia

1. D. Boratyn, W. Słomczyński, D. Stolicke, *Seat Allocation and Seat Bias under the Jefferson-D'Hondt Method*, arXiv:1805.08291.
2. J. Flis, W. Słomczyński, D. Stolicke, *Pot and Ladle: A Formula for Estimating the Distribution of Seats under the Jefferson-D'Hondt Method*.
3. Happacher, M., and Pukelsheim, F. (2000), *Rounding probabilities: Maximum probability and minimum complexity multipliers*, Journal of Statistical Planning and Inference, 85(1-2), 145-158.

Sondaże (nie) kłamią

Wróćmy więc do postawionego chwilę temu pytania: Jak przeliczyć ogólnokrajowe wyniki sondażowe na faktyczny podział mandatów? Nie znamy dokładnych wartości poparcia każdej partii w każdym okręgu, a tylko liczbę okręgów (w Polsce w wyborach do sejmu jest ich $o = 41$), liczbę wszystkich mandatów (do sejmu wybieramy $M = 460$ posłów) oraz liczbę komitetów, które przekroczyły próg wyborczy (w ostatnich wyborach było to $n = 5$). W każdym z o okręgów wybieramy średnio $S = M/o$ posłów, więc przyjmując mnożnik $\nu_S = S + n(q - 1/2)$, partia, która uzyskała p_i -tą część ważnych głosów w skali kraju, powinna otrzymać w każdym okręgu mniej więcej $r_1(p_i \cdot \nu_S)$ mandatów. Jeśli przyjmiemy, że średnia wartość części ułamkowej $p_i \cdot \nu_S$ to $1/2$ (bo pochodzi ona z odcinka $(0, 1)$), to tyle średnio będziemy „tracili” na zaokrąglaniu w dół. W związku z tym otrzymujemy, że i -ta partia otrzyma

$(p_i \cdot (S + 1/2 \cdot n) - 1/2) \cdot o = p_i \cdot (M + 1/2 \cdot n \cdot o) - o/2$ mandatów w skali kraju. Możemy ten wzór interpretować w ten sposób, że każda partia dostaje $p_i M$ mandatów, a następnie oddaje $o/2$ mandatów do puli, która znowu zostaje podzielona. Jeśli próg wyborczy przekroczyło n komitetów, to w dodatkowej puli mamy $1/2 \cdot n \cdot o$ mandatów, z których otrzymujemy p_i -tą część.

Aby wyprowadzić powyższy wzór, musieliśmy przyjąć dość dużo założeń i uproszczeń. Okazuje się jednak, że w praktyce sprawdza się dość dobrze, co można zobaczyć na przykładzie ostatnich wyborów do sejmu w Polsce.

Komitet	Głosy	Część głosów ważnych	Przewidywane	Faktyczne
PiS	7 640 854	0.3676	186.26	194
KO	6 629 402	0.3189	158.89	157
TD	3 110 670	0.1496	63.67	65
NL	1 859 018	0.0894	29.80	26
Konf	1 547 364	0.0744	21.37	18

Dodajmy, że wzór ten został przedstawiony w pracy [2], a jego matematyczna słuszność przy pewnych założeniach na temat systemu wyborczego została udowodniona w pracy [1]. Analizując ten wzór, możemy też zobaczyć, na czym polega faworyzowanie większych partii w systemie wyborczym stosowanym w Polsce.

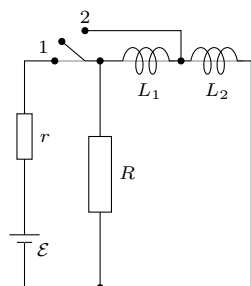
Na koniec warto dodać, że metoda d'Hondta jest stosowana w Polsce także do wyborów do sejmików województw, rad powiatów i większych rad gmin. Zachęcam Czytelników do sprawdzenia w swojej Małej Ojczyźnie, na ile faktyczny podział mandatów w tych organach samorządowych pokrywa się z tymi przewidywanymi przez podany wyżej wzór.

Klub 44 F

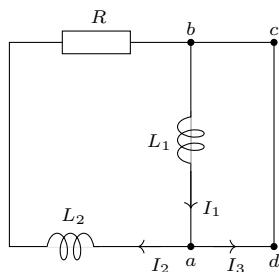


Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
790 ($WT = 2,32$), 791 ($WT = 2,92$)
z numeru 1/2025

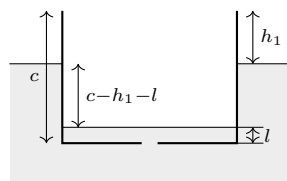
Jacek Konieczny Poznań 41,11
Jan Zambrzycki Białystok 4 – 33,80
Andrzej Nowogrodzki Chocianów 3 – 29,48



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2025

Przypominamy treść zadań:

796. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 klucz zamknięto do położenia 1, a po ustaleniu się prądów bardzo szybko przełączono go do pozycji 2. Przyjmując, że cewki L_1 i L_2 są idealne, wyznaczyć ilość ciepła, jaka wydzielili się na oporniku R po przełączeniu. Siła elektromotoryczna źródła wynosi $\mathcal{E}$, jego opór wewnętrzny r .

797. W środku dna prostopadłościenniej barki o długości $a = 80$ m, szerokości $b = 10$ m i wysokości $c = 5$ m powstał otwór o średnicy $d = 1$ cm. Ocenic czas, po którym barka zatoni, jeśli nie będzie odpompowywana z niej woda. Barka jest otwarta z góry, nie ma żadnego ładunku, początkowa wysokość burty nad poziomem wody wynosi $h = 3,75$ m.

796. Przed przełączeniem klucza przez cewki L_1 i L_2 płynie prąd o natężeniu $I = \mathcal{E}/r$. Ponieważ cewki są idealne, napięcie na oporniku R , a tym samym natężenie prądu płynącego przez ten opornik, są równe zero. Natychmiastowe przełączenie klucza z położenia 1 do położenia 2 oznacza, że w trakcie przełączania natężenie prądu w cewkach praktycznie nie zmienia się. Układ w położeniu 2 przedstawiony jest na rysunku 2. Wielkości początkowe wynoszą:

$$I_1(0) = I_2(0) = I = \mathcal{E}/r; \quad I_3(0) = 0.$$

Z prawa Kirchhoffa dla konturu $abcd$ w dowolnej chwili czasu mamy:

$$L_1 dI_1/dt = 0, \text{ stąd } I_1 = \text{const.}$$

Ponieważ $I_1 = I_2 + I_3$, zachodzi związek:

$$dI_1/dt = dI_2/dt + dI_3/dt, \text{ stąd } dI_2 = -dI_3.$$

Na oporniku R wydzielą się ciepło, co powoduje zanikanie prądu I_2 , a jego zmniejszenie jest równe przyrostowi prądu I_3 . Po ustaleniu się prądów mamy:

$$I_1(\infty) = I_3(\infty) = \mathcal{E}/r, \quad I_2(\infty) = 0.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, energia pola magnetycznego cewki L_2 wydzielą się w postaci ciepła Q na oporniku R :

$$Q = L_2 I_2^2(0)/2 = L_2 \mathcal{E}^2 / (2r^2).$$

797. Warunek pływania barki, w której nie ma wody, ma postać:

$$(1) \quad mg = \rho g ab(c - h),$$

gdzie m jest masą barki, a ρ gęstością wody. Załóżmy, że barka zanurzyła się tak, że wysokość jej burty nad powierzchnią wody jest równa h_1 , a grubość warstwy wody wewnątrz barki wynosi l (rys. 3). Warunek pływania przyjmuje teraz postać:

$$(2) \quad mg + \rho g abl = \rho g ab(c - h_1).$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad c - h_1 - l = c - h,$$

co oznacza, że różnica poziomów wody w dowolnej chwili (dopóki barka nie zatoni) jest stała i równa różnicy wysokości barki i wysokości burty nad wodą w nieprzeciekającej barce. Zatem woda dostaje się do barki ze stałą prędkością. Wyznamy ją, korzystając z równania Bernoulliego.

Przyjmujemy, że energia potencjalna na poziomie wody na zewnątrz barki wynosi 0. Dla rurki prądu, która zaczyna się na poziomie wody na zewnątrz barki i kończy na poziomie wody wewnątrz barki nad otworem, możemy napisać:

$$(4) \quad p_0 = p_0 - \rho g(c - h_1 - l) + \rho v^2/2,$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym, v prędkością wody wciekającej do otworu. W równaniu (3) uwzględniliśmy fakt, że powierzchnia wody wewnątrz barki jest dużo większa od powierzchni otworu. Dlatego prędkość podnoszenia się wody w barce jest dużo mniejsza od v i można ją zaniedbać. Z równań (3) i (4) otrzymujemy: $v = \sqrt{2g(c - h)}$.

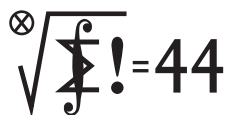
Barka zatoni, gdy krawędź burty zrówna się z powierzchnią wody na zewnątrz, czyli poziom wody nad podłogą osiągnie wartość h , a objętość wody w barce

$$V = abh = Sv\Delta t, \text{ gdzie } S = \pi d^2/4.$$

Szukany czas:

$$\Delta t = 4abh / (\pi d^2 \sqrt{2g(c - h)}) \approx 3 \text{ miesiące.}$$

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
893 ($WT = 3,25$) i 894 ($WT = 1,35$)
z numeru 1/2025

Andrzej Kurach	Ryjewo	47,81
Janusz Olszewski	Warszawa	45,27
Krzysztof Zygan	Lubin	44,74
Michał Warmuz	Żywiec	41,39
Marcin Kasperski	Warszawa	40,49
Marek Spychała	Warszawa	39,84
Piotr Wiśniewski	Warszawa	38,24
Grzegorz Wiączkowski		37,93
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,71
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,53
Krzysztof Maziarz	Londyn	34,67
Jerzy Cisło	Wrocław	33,16

I znów: na linii mety – dobrze znane nazwiska: pan Andrzej Kurach po raz czwarty; pan Janusz Olszewski po raz dwudziesty piąty; pan Krzysztof Zygan po raz drugi. Czekamy na kolejne okrążenia!

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2025

Przypominamy treść zadań:

899. Niech $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ($\mathbb{Z}^2$ jest zbiorem punktów kratowych, czyli uporządkowanych par liczb całkowitych). Określamy odległość punktów $P, Q \in \mathbb{Z}^2$, $P = (x, y)$, $Q = (u, v)$ wzorem $d(P, Q) = \max(|x - u|, |y - v|)$. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele pięcioelementowych zbiorów takich punktów kratowych $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$, że (dla $i = 1, 2, 3, 4$): $d(P_0, P_i) = 1$, $g(P_0) \leq g(P_i)$.

900. Wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 jednej zmiennej, o współczynnikach rzeczywistych, spełniają warunki:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_4(x) & \text{dla } x \in [0, 1], \\ f_2(x) &\leq f_4(x) \leq f_1(x) \leq f_3(x) & \text{dla } x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Wykazać, że $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$.

899. O punktach P, Q z odległością $d(P, Q) = 1$ będziemy mówili, że sąsiadują. Weźmy dowolny kwadrat złożony z 16 punktów kratowych (po cztery w czterech rzędkach). Odetnijmy punkty narożne. Zostaje układ K złożony z 12 punktów (kolejno w rzędkach: 2, 4, 4, 2). W tym układzie każdy punkt ma co najmniej czterech sąsiadów.

Bierzemy jako P_0 ten punkt zbioru K , w którym funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 będą punktami zbioru K , sąsiadującymi z P_0 (gdy jest ich więcej, wybieramy cztery dowolne). Piątka P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 ma wymaganą własność.

Na płaszczyźnie kratowej możemy umieścić nieskończenie wiele kopii zbioru K i w każdym z nich znaleźć piątkę punktów, o jaką chodzi.

900. Oznaczenia przedziałów: $I = [0, 1]$, $J = [-1, 0]$. Dowód tezy zadania nie wprost. Przypuśćmy, że nie wszystkie cztery wielomiany są identyczne. Z podanych warunków wynika, że wówczas żadne dwa nie są identyczne. Zatem następujące trzy wielomiany są niezerowe:

$$P = f_2 - f_1 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I, \end{cases} \quad Q = f_3 - f_1 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I, \end{cases} \quad R = f_4 - f_1 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I. \end{cases}$$

Jasne, że $P(0) = Q(0) = R(0) = 0$. O lokalnym zachowaniu tych trzech wielomianów w otoczeniu zera decydują ich składniki w najniższej potęgde. Używając skrótu sws (= składniki wyższych stopni) możemy napisać:

$$P(x) = ax^k + \text{sws}, \quad Q(x) = bx^l + \text{sws}, \quad R(x) = cx^m + \text{sws}$$

(k, l, m to wykładniki owych wiodących składników; a, b, c – współczynniki).

Wielomiany P i R zmieniają znak przy przejściu przez 0 i wobec tego wykładniki k i m są nieparzyste; natomiast Q ma lokalne minimum w punkcie 0, zatem wykładnik l jest parzysty (tak więc $k \neq l \neq m$).

Wielomian $P - Q = f_2 - f_3 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \leq 0 & \text{w } I \end{cases}$ ma lokalne maksimum w punkcie 0, co (wobec wiedzy, że $k \neq l$) oznacza, że $\min\{k, l\}$ jest liczbą parzystą. Stąd, na mocy wcześniejszych ustaleń, $k > l$.

Wielomian $Q - R = f_3 - f_4 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \leq 0 & \text{w } I \end{cases}$ zmienia znak przy przejściu przez 0, co teraz oznacza, że $\min\{l, m\}$

jest liczbą nieparzystą. Stąd $l > m$ (i w konsekwencji $k > m$).

$$\text{Wreszcie wielomian } R - P = f_4 - f_2 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I \end{cases}$$

ma lokalne minimum w punkcie 0, co oznacza, że $\min\{k, m\}$ (czyli po prostu m) jest liczbą parzystą. Ale wcześniej zostało ustalone, że m jest liczbą nieparzystą. Sprzeczność kończy dowód.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Nazewnictwo związane z tym obserwatorium jest nieco skomplikowane. Sam teleskop nosi nazwę Simonyi Survey Telescope na cześć jego współfundatorów Charlesa and Lisy Simonyi. Teleskop znajduje się w Obserwatorium im. Very C. Rubin, a przegląd nieba, który zostanie wykonany za jego pomocą, to Legacy Survey of Space and Time (w skrócie LSST). Kamera cyfrowa zamontowana przy teleskopie i rejestrująca zdjęcia to na szczęście tylko LSST Camera. Całości nazewnictwa zamieszania dopełnia fakt, że projekt przez długi czas nosił nazwę Large Synoptic Survey Telescope (co również w skrócie daje LSST).

Dla porównania typowe kamery cyfrowe w smartfonach mają rozdzielczość od 12 do 108 megapixeli.

W ciągu planowanych 10 lat obserwacji baza danych urośnie do około 500 petabajtów. Spodziewamy się zrobić zdjęcia około 20 miliardów (!) samych tylko galaktyk, z czego większość obserwowana będzie pierwszy raz.

Strona internetowa Obserwatorium Very C. Rubin: <https://rubinobservatory.org/>

Może i trwają wakacje, ale mimo to w astronomii sporo się dzieje. Pod koniec maja 2025 roku ruszył nowy teleskop umieszczony w (również nowym) Obserwatorium im. Very C. Rubin w Chile. Od tego czasu inżynierowie i naukowcy pracowali nad jego kalibracją, a w zeszłym miesiącu świat mógł podziwiać pierwsze zdjęcia Wszechświata wykonane tym instrumentem.

I co tu dużo mówić. Dech zapiera.

Nie ma się zresztą czemu dziwić, bo Obserwatorium im. Very C. Rubin to jeden z najważniejszych współczesnych projektów astronomicznych. Sam teleskop wyposażony jest w unikalny system optyczny, główne zwierciadło ma aż 8,4 metra średnicy. Nie jest to może największe lustro na świecie, ale cała jego konstrukcja zakrawa na cud technologiczny. Zwierciadło teleskopu unosi się na cienkiej warstwie oleju. Montaż teleskopu wyposażony jest w magnetyczne silniki, które przy pełnej prędkości mogą obrócić całą 300-tonową konstrukcję teleskopu o 360 stopni w nieco ponad pół minuty. Do tego teleskop posiada największą kamerę cyfrową, jaka kiedykolwiek została zbudowana. Ma rozdzielczość 3200 megapixeli i rozmiar małego samochodu.

Ale to nie koniec wielkich liczb. Obserwatorium nie będzie skupiało się na obserwacjach pojedynczych obiektów astronomicznych, tak jak to robi na przykład Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba. Zamiast tego wykona zdjęcia nieba południowego, skanując je całe w 3 noce i powtarzając obserwacje przez następnych 10 lat. Każdej nocy wygenerowanych zostanie 1000 zdjęć nieba, o łącznej wadze około 20 terabajtów. Zaobserwowane zostaną miliardy nowych gwiazd, galaktyk, supernowych, planet, asteroid, komet i innych niezliczonych obiektów astronomicznych. Dane te prawdopodobnie zrewolucjonizują naszą wiedzę o Wszechświecie.

A skoro już mowa o obserwacjach, na okładce tego numeru *Delty* możecie podziwiać przedsmak możliwości Obserwatorium im. Very C. Rubin. Zdjęcie dwóch mgławic: Trójkątnej (mniejsza) i Laguny (większa). Każda to obłok gazu i pyłu oddalony o tysiące lat świetlnych od nas. Niebieskie regiony są oświetlone rozproszonym przez pył światłem młodych, gorących gwiazd. Różowawe kolory pochodzą z emisji wzbudzonych atomów wodoru. A ciemne *wąsy* to pasy pyłu. We wnętrzach tych mgławic rodzą się nowe gwiazdy, które natychmiast zaczynają przekształcać swoje otoczenie, emitując silne wiatry gwiazdowe i promieniowanie, które *rozdmuchuje* otaczający je gaz. Ich zdjęcia nie tylko zachwycają kolorami, ale zapewniają naukowcom doskonałe dane na temat najwcześniejszych etapów formowania się gwiazd.

Co ciekawe, zdjęcie zamieszczone na okładce musiało być drastycznie przycięte, a jego rozdzielczość obniżona, ponieważ poziom dokładności obserwacji wykonanych przez Obserwatorium Very C. Rubin jest niemożliwy do pokazania na stronie czasopisma, a nawet na ekranie komputera! W pełnej rozdzielczości nie zmieści się na żadnym istniejącym monitorze. Dlatego na komputerze widzimy albo pomniejszony obraz pozbawiony szczegółów, albo niewielki wycinek całego obrazu. Oryginalny obraz powstał z 678 osobnych zdjęć wykonanych w ciągu zaledwie 7,2 godziny obserwacji i łącznie skomponowany z około dwóch bilionów (2×10^{12}) pikseli danych. Żadne inne obserwatorium nie jest w stanie tak szybko i z taką dokładnością uzyskać obrazu tak rozległego obszaru nieba.

Zachęcamy więc do odwiedzenia strony Obserwatorium, aby podziwiać to i inne zdjęcia w pełnej okazałości. Najlepiej na jak największym ekranie!

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



W ósmym miesiącu roku Słońce wędruje szybko na południe, obniżając w trakcie miesiąca wysokość górowania prawie o 10° . Wskutek tego czas jego przebywania nad horyzontem skróci się w Polsce o około 2 godziny. Od sierpnia na teren całego kraju wracają noce astronomiczne, dzięki czemu można powrócić do obserwowania najsłabszych nawet obiektów.

W pierwszej połowie nocy wysoko na niebie wędruje gwiazdozbiór Łabędzia, gdzie znajduje się m.in. długookresowa gwiazda zmienna χ Cygni. Jest to miryda, czyli gwiazda pulsująca, zmieniająca jasność od $+3,3$ do $+14,2^m$ w ciągu 408 dni. W tym roku gwiazda osiąga maksymalną jasność 22 sierpnia, zmieniając wygląd gwiazdozbioru Łabędzia na kilkadziesiąt dni. Sama gwiazda znajduje się na linii łączącej gwiazdy η Cyg i Albireo (β Cyg) jakieś $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd, a południk lokalny przecina niewiele przed północą.

1 sierpnia Księżyc zaprezentuje swoją tarczę oświetloną w połowie, świecąc $5,5^\circ$ pod Zuben Elgenubi, czyli gwiazdą α gwiazdozbioru Wagi. W tym czasie przebywa on daleko na południe od ekliptyki i do pełni, przez którą przejdzie 9 dnia miesiąca, jego wysokość na niebie nie przekroczy 20° . Tutaj warto wspomnieć o spotkaniu Księżyca w fazie 71% z Antaresem, czyli najjaśniejszą gwiazdą Skorpiona, 3 sierpnia, gdy wieczorem dystans między tymi ciałami niebieskimi zmniejszy się do 3° . Trzy dni później Księżyc w fazie zwiększonej do 93% minie w podobnej odległości Nunki, jedną z jaśniejszych gwiazd Strzelca.

Noce z 11 na 12 i z 12 na 13 sierpnia Księżyc spędzi w towarzystwie pary planet Saturn-Neptun. Do tego momentu jego faza spadnie poniżej 90%. Najpierw Księżyc pokaże się 7° na zachód od Saturna, a następnie w podobnej odległości, ale na północny wschód od planety z pierścieniami. Obie planety zbliżają się do wrześnieowych opozycji i świecą na niebie przez całą najciemniejszą część nocy, górując około godziny 3, a dystans między nimi wynosi około 1° . Saturn pojaśnieje do $+0,7^m$ przy średnicy tarczy $17''$. Jasność Neptuna wynosi $+7,8^m$. Pierścienie Saturna ponownie zaczną się zwężać i stosunek ich małej do wielkiej półosi zmniejszy się do 0,05.

16 sierpnia naturalny satelita Ziemi przejdzie przez ostatnią kwadrę, zajmując pozycję mniej więcej 8° na zachód od Plejad. Dobę później Księżyc przesunie się o 13° na wschód, świecąc 5° na wschód od nich. Niecałe 4° na południe od tej gromady gwiazd swoją pętlę na niebie kreśli planeta Uran, która w listopadzie przejdzie przez opozycję. Do końca sierpnia Uran zbliży się na mniej niż 3° do gwiazdy 4. wielkości 37 Tau, a jej blask wyniesie $+5,7^m$.

Po ostatniej kwadrze Księżyc stanie się ozdobą porannego nieba, wznosząc się wysoko na niebie, mimo małej fazy i niedużej odległości kątowej od Słońca. Bardzo dobrze widoczne stanie się tzw. światło popielate. Do nowiu, przez który przejdzie 23 sierpnia, czeka go kilka spotkań z jasnymi obiektami na niebie. 18 sierpnia Księżyc zaprezentuje tarczę w fazie 29%, zbliżając się na $2,5^\circ$ do gwiazdy El Nath, drugiej co do jasności

gwiazdy Byka. O godzinie 4 oba ciała osiągną wysokość prawie 40° .

Bardzo ciekawa konfiguracja stanie się udziałem Księżyca 20 sierpnia. Tego ranka jego sierp zwęzi się do 11% i o tej samej porze zajmie pozycję na wysokości 18° . W bezpośrednim jego sąsiedztwie znajdzie się kilka jasnych obiektów: 5° na lewo pokaże się para gwiazd Kastor i Polluks, czyli dwie najjaśniejsze gwiazdy Bliźniąt, tyle samo, tylko na prawo od Księżyca znajdzie się planeta Jowisz, $6,5^\circ$ na południe zaś da się dostrzec planetę Wenus. Dobę później Srebrny Glob zmniejszy fazę do 5%, tworząc trójkąt równoramienny z Polluksem i Wenus o długości ramion 9° .

Dwie najjaśniejsze planety na naszym niebie w sierpniu ucieszą wzrok obserwatorów nieba, tworząc całkiem ciasny układ. Na początku miesiąca to Wenus zajmie wyższą pozycję na niebie, do końca sierpnia pokona jednak ponad 35° , mijając po drodze Jowisza, który w tym samym czasie przesunie się o 6° . 12 sierpnia dystans między planetami zmniejszy się do mniej niż 1° , a 1 września Wenus przejdzie niewiele dalej od M44. W sierpniu Jowisz świeci blaskiem -2^m , przy średnicy tarczy $34''$. Wenus jest o 2^m jaśniejsza, średnica jej tarczy spadnie do $12''$, faza urośnie zaś do 84%.

W ostatniej dekadzie miesiąca poranne niebo ozdobi również planeta Merkury, która 19 sierpnia osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią, oddalając się od Słońca na 19° . Około godziny 4:30 planeta wzniesie się na wysokość 5° , a potem zacznie się zbliżać do Słońca, pozostając widoczna do końca sierpnia. W tym czasie jej jasność zwiększy się od 0^m do -1^m , przy tarczy o średnicy $6''$ i fazie rosnącej od 40% do 85%. 22 sierpnia bardzo cienki sierp Księżyca znajdzie się 6° od Merkurego, na godzinie 8 względem niego.

Na koniec sierpnia Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, jednak ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki jest widoczny słabo, wędrując nisko i zachodząc niewiele po Słońcu. 31 sierpnia, mając tarczę oświetloną w połowie, pokaże się on ponownie 4° na lewo od Antaresa. Tym razem po jego drugiej stronie.

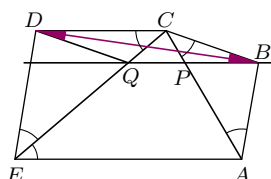
Ariel MAJCHER

Rozwiązania zadań ze strony 3



Rozwiązanie zadania M 1825.

Z równości kątów mamy $CD \parallel AE$. Niech prosta przechodząca przez B i równoległa do AE przecina AC i CE odpowiednio w punktach P i Q . Zauważmy, że P i Q dzielą podstawy CA i CE podobnych trójkątów równoramiennych ABC i EDC w tym samym stosunku, więc $\angle CBP = \angle CDQ$. Wobec tego czworokąt $BCDQ$ jest równoległobokiem, a środki odcinków BD i CQ oczywiście się pokrywają.



Rozwiązanie zadania M 1826.

Niech $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n}$ będą liczbami zapisanymi na kartach. Udowodnimy, że $s_1 = x_1 + x_3 + \dots + x_{2n-1}$ oraz $s_2 = x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}$ spełniają warunki zadania. Nierówność $s_1 \leq s_2$ jest oczywista. Rozważmy drugą nierówność

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &\geq \frac{x_3 + x_5 + \dots + x_{2n-1} + 1}{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n-2} + 2} \geq \\ &\geq \frac{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n-2} + 1}{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n-2} + 2} = \\ &= 1 - \frac{1}{x_2 + x_4 + \dots + x_{2n-2} + 2} \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 1827.

Liczby p i q są względnie pierwsze, więc istnieje takie $1 \leq a < q$, że $ap \equiv 1 \pmod{q}$. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

- Jeśli $1 \leq a \leq p$, to rozpatrzmy dwie kolejne liczby: ap oraz $ap - 1$. Ponieważ $1 \leq a \leq p$, największym dzielnikiem pierwszej liczby ap jest p . Ponadto $ap - 1 \leq p^2 - 1 < q^2$, więc liczba całkowita $(ap - 1)/q$ jest mniejsza od q , zatem żaden dzielnik pierwszy liczby $ap - 1$ nie przekracza q .
- Jeśli $p < a < q$, wtedy $(q - a)p \equiv -1 \pmod{q}$ i $1 \leq q - a < q$. Rozpatrzmy teraz dwie kolejne liczby $(q - a)p$ oraz $(q - a)p + 1$. Ponieważ $q - p < p < a$, więc $q - a < p$, a więc największym dzielnikiem pierwszej liczby $(q - a)p$ jest p . Z drugiej strony

$(q - a)p + 1 < q^2$, zatem liczba całkowita $((q - a)p + 1)/q$ jest mniejsza od q i podobnie jak w pierwszym przypadku żaden dzielnik pierwszy liczby $(q - a)p + 1$ nie przekracza q .



Rozwiązanie zadania F 1125.

Zbadajmy ruch małego elementu masy Δm znajdującego się w chwili początkowej w odległości r od środka ciała. Element ten oddala się od środka ciała z prędkością $v = Hr$ i jest przyciągany grawitacyjnie jedynie przez masę wypełniającą kulę o promieniu r . Masa znajdująca się w odległości od środka większej niż r „ucieka” z prędkością większą niż Hr i nie oddziałuje grawitacyjnie na Δm . Całkowita energia ΔE elementu Δm wynosi:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\frac{4\pi r^3 \rho G \Delta m}{3r} + \frac{1}{2} \Delta m v^2 \\ &= -\frac{4\pi r^3 \rho G \Delta m}{3r} + \frac{1}{2} \Delta m H^2 r^2. \end{aligned}$$

Ekspansja skończy się ponownym skupieniem („zapadnięciem”) masy, jeśli $\Delta E < 0$. Oznacza to, że ekspansja wyhamuje, po czym zakończy się ponownym skupieniem całej masy, jeśli początkowa gęstość masy ciała spełniała warunek:

$$\rho > \frac{3H^2}{8\pi G}.$$



Rozwiązanie zadania F 1126.

Minimalną pracę potrzebną do zamrożenia wody obliczymy, porównując działanie kompresora z odwróconym cyklem Carnota – pobierającym ciepło od wody o temperaturze bezwzględnej $T_1 = t_w + 273$ K i oddającym ciepło otoczeniu o temperaturze bezwzględnej $T_2 = t_p + 273$ K ($T_2 > T_1$), wykonującym przy tym pracę $W = P\tau$. Ciepło pobrane $Q_1 = Lm$, a oddane $Q_2 = Q_1 + W$. Na podstawie II zasady termodynamiki wiemy, że spełniona jest nierówność Clausiusa:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0,$$

czyli ($Q_2 = Q_1 + W$):

$$W = P\tau \geq \frac{T_2 - T_1}{T_1} Q_1 = \frac{T_2 - T_1}{T_1} Lm.$$

Ostatecznie:

$$\tau \geq \frac{(T_2 - T_1)Lm}{T_1 P}.$$

Liczbowo: $\tau \geq 918$ s $\approx 15,3$ minuty.

Studencka Konferencja Naukowa

w ramach obchodów dni prof. Antoniego Hoborskiego

elements X

24- 26 Października 2025

STATYSTYKA | RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA | MACHINE LEARNING | ANALIZA DANYCH

Z nami odnajdziesz swój matematyczny element!

www.elements.agh.edu.pl



W 80 dni dookoła...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W tym numerze, bez szczególnego wstępu, zapraszam do zmagania z kombinatorycznymi zadaniami o okręgach i sferach.

Zadania

1. Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy mają w sumie tyle paliwa, aby wystarczyło Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Dowieść, że Fredek może rozpocząć podróż od kolegi w takim miejscu, że jadąc po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.
(Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej, 1999)
2. Świat ma kształt sfery. Fredek, spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. 21 stycznia o godzinie 10:00 Fredek spojrział na świat po raz pierwszy, 21 lutego o godzinie 10:00 Fredek spojrział na świat (być może z innego punktu) po raz drugi i podobnie 21 dnia każdego miesiąca spoglądał na świat o godzinie 10:00. Kiedy najwcześniej Fredek może uszczęśliwić cały świat?
(Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej, 2001)
3. Na okręgu o środku O pomalowano na czerwono pewną skończoną liczbę rozłącznych łuków. Udowodnić, że jeśli łączna długość czerwonych łuków:
 - (a) jest większa niż połowa długości okręgu, to dla pewnych dwóch czerwonych punktów A i B kąt AOB jest prosty.
 - (b) jest mniejsza niż połowa długości okręgu, to takich punktów jak wyżej być nie musi.(IX Wielkopolska Liga Matematyczna, zmodyfikowane)
4. Rozwiązać trójwymiarową wersję punktu (b) poprzedniego zadania: pokoloruj na czerwono pewien obszar sfery mniejszy niż $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,2929$ jej powierzchni w taki sposób, by nie było dwóch czerwonych punktów tworzących kąt prosty o wierzchołku w środku sfery.
5. Na torze w kształcie okręgu biegnie n zawodników, każdy porusza się ze stałą szybkością i wszyscy biegną w tę samą stronę. Zawodnicy wystartowali równocześnie z tego samego miejsca na torze. Po pewnym czasie wszyscy równocześnie wrócili w to miejsce i zakończyli bieg. Każdy z nich wykonał inną liczbę okrążeń. Na torze było dokładnie k miejsc, w których wszyscy zawodnicy pojawili się równocześnie, wliczając w to miejsce startu. W zależności od n wyznaczyć wszystkie możliwe wartości k .
(Matematyczny Kalendarz Adwentowy 2023, zmodyfikowane)
6. Po okrągłym torze o długości 1 biega n zawodników. Wszyscy zaczynają w tym samym miejscu i poruszają się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, każdy z inną szybkością, wyrażającą się liczbą naturalną. Nazwijmy biegacza δ -samotnym, jeśli na łukach otwartych o długości δ w przód i wstecz od niego nie ma żadnych innych biegaczy. Przez δ_n oznaczmy największą taką liczbę, dla której, niezależnie od szybkości biegaczy, każdy z nich w pewnym momencie jest δ_n -samotny.
 - (a) Udowodnić, że $\delta_2 = \frac{1}{2}$ i $\delta_3 = \frac{1}{3}$.
 - (b) Wykazać, że $\delta_n \geq \frac{1}{2n}$.(Problem samotnego biegacza)

Ciekawostka. Wiadomo, że $\delta_n = \frac{1}{n}$ dla $n \leq 7$, a wartości δ_n dla $n \geq 8$ nie są znane.
kolora w Δ_{12}^{12} .
(b) Rozwiązanie można znaleźć w artykule *Problem samotnego* (znajemy, że „dwukąt” to średnica okręgu). Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest oddalony od punktu A o co najwyżej $\frac{1}{3}$ okręgu.
wpisanego w okrąg toru, którego jednym z wierzchołków jest punkt A pozostałych dwóch biegaczy są wierzchołkami wielokąta foremnego o boku $\frac{1}{3}$. Można przyjąć (dlaczego?), że porusza się on dowolnego biegacza. Można przyjąć (dlaczego?), że porusza się on o $\frac{1}{3}$. Wybierzmy
6. (a) Podpowiemy jedynie, jak uzasadnić $\delta_3 \geq \frac{1}{3}$. Wybierzmy
z szybkością $i + \frac{1}{n}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to jest dokładnie k miejsc
5. Przyjmijmy długość toru równą 1. Jeśli i -ty zawodnik biegnie
wskazówce do tego zadania.
powierzchni kuli n -wymiarowej jest analogiczny do opisanego we
Hypoteza dwóch czapek mówi, że optymalny wybór czerwonej
ze $\alpha_3 > 0,2978$. Żadna dokładna wartość α_n dla $n > 2$ nie jest znana.
ze $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, a w trzecim, ze $\alpha_3 \geq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,2929$. Wiadomo również,
gwarantuje wystąpienie kąta prostego. W zadaniu trzecim dowodzimy,

Wskazówki do zadań
1. Najpierw wykonajmy symulację podróży, rozpoczynając od dowolnego kolegi i dopuszczając ujemną ilość paliwa. Właściwa podróż należy zacząć w punkcie, w którym Fredek miał najmniej paliwa podczas symulacji.
2. Fredek jednakowo nie uszczęśliwi pewnego okręgu wielkiego sfery, a więc w dwóch spójrznięciach nie uszczęśliwi pewnych dwóch punktów antypodalnych.
3. (a) Okrąg o 90 stopni wokół jego środka. Jeśli czerwona powierzchnia jest większa niż $\frac{1}{2}$ okręgu, to pewien czerwony punkt A oraz obraz pewnego czerwonego punktu B pokryją się. Kąt AOB jest prosty.
(b) Narzuciśmy okrąg w taki sposób, by jego środek był środkiem układu współrzędnych. Pomalujmy na czerwono dwa łuki otwarte, każdy z nich długości $\frac{1}{4}$ okręgu, jeden leżący w I ćwiartce układu, a drugi w III.
4. Rozważyć otwarte „kola podbiegunowe” rozpoczynające się od 45° szerokości geograficznej.
Ciekawostka. To i poprzednie zadanie są szczególnymi przypadkami problemu *Witsenhausen*. Oznaczmy przez α_n najmniejszą taką liczbę, że pomalowanie więcej niż α_n powierzchni kuli n -wymiarowej

XXVIII

Dolnośląski Festiwal Nauki 2025



Wrocław

13-20.09

Legnica
23-28.09

Głogów
2-3.10

Ząbkowice
Śląskie
- Strzelin
2-04.10

Bolesławiec
7-8.10

Ziemia
Kłodzka
9-10.10

Jelenia
Góra
16-17.10

Zgorzelec
20-21.10

Lubin
- Polkowice
22-23.10

Dzierżoniów
23-24.10

Wałbrzych
27-31.10

Nauka jest chrobra

www.festiwal.wroc.pl

— Ponad 1500 wydarzeń —



WSTĘP WOLNY