

Ciągi - zadania uzupełniające

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność, a następnie wyznacz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

c) $x_1 = \sqrt{12}, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, n \geq 1,$ ¹

b) $b_n = \frac{3^n}{n!}$

d) $x_1 \in [0, 2]$ oraz $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3x_n}{5}, n \geq 1$

Zadanie 2. Udowodnić, że ciąg (a_n) dany wzorem

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

jest zbieżny.

Zadanie 3. Istnieje 7 tzw. symboli nieoznaczonych: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$. Do każdego z nich podać takie przykłady ciągów, że granica wynosi odpowiednio: 0, 1, 5, $+\infty$, i tam gdzie to możliwe $-\infty, -1$.²

Zadanie 4. Podać przykłady ciągów $(a_n), (b_n)$, które nie są zbieżne, ale:

- a) ich iloczyn jest zbieżny
- b) ich iloraz jest zbieżny
- c) ich suma jest zbieżna
- d) ich różnica jest zbieżna

Zadanie 5. Obliczyć:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Zadanie 6. Udowodnij, że w n -kącie wypukłym suma kątów wewnętrznych wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Zadanie 7. Udowodnij, że liczba podzbiorów zbioru n -elementowego ($n \in \mathbb{N}$) wynosi 2^n .

Zadanie 8. Udowodnić, że wzorem ogólnym ciągu (a_n) danego rekurencyjnie


$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 5, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad \text{gdy } n \geq 1 \end{cases}$$

jest $a_n = 2^n + (-1)^n$.

Zadanie 9. Ciąg (a_n) dany jest wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + 8n \end{cases}$$

Znaleźć wzór ogólny tego ciągu i udowodnić jego poprawność.

Zadanie 10. Udowodnić, że dla $n \geq 1$ szachownicę o wymiarach $2^n \times 2^n$ z wyciętym polem narożnym można pokryć klockami w kształcie litery L. 

Zadanie 11. „Udowodnić”, że wszystkie dziewczyny mają blond włosy, a następnie wskazać błąd w dowodzie.

Zadanie 12. „Udowodnić”, że wszystkie dziewczyny mają ten sam kolor włosów, a następnie wskazać błąd w dowodzie.

¹Zauważmy, że de facto mamy do obliczenia $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$

²Zauważmy, że nie dostaniemy ujemnych granic w sytuacji symboli z potęgami.